

FÍSICA 01

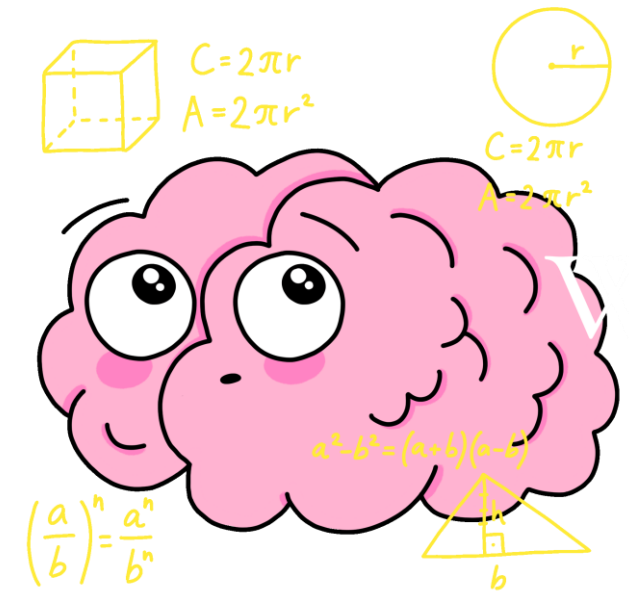
Clase 12: Movimiento en 2D –Lanzamiento de proyectil-Movimiento Circular



Profesor: Mirko Mol

OBJETIVOS DE LA CLASE

- I. Ejercicios movimiento de proyectil
- II. Movimiento Circular uniforme.

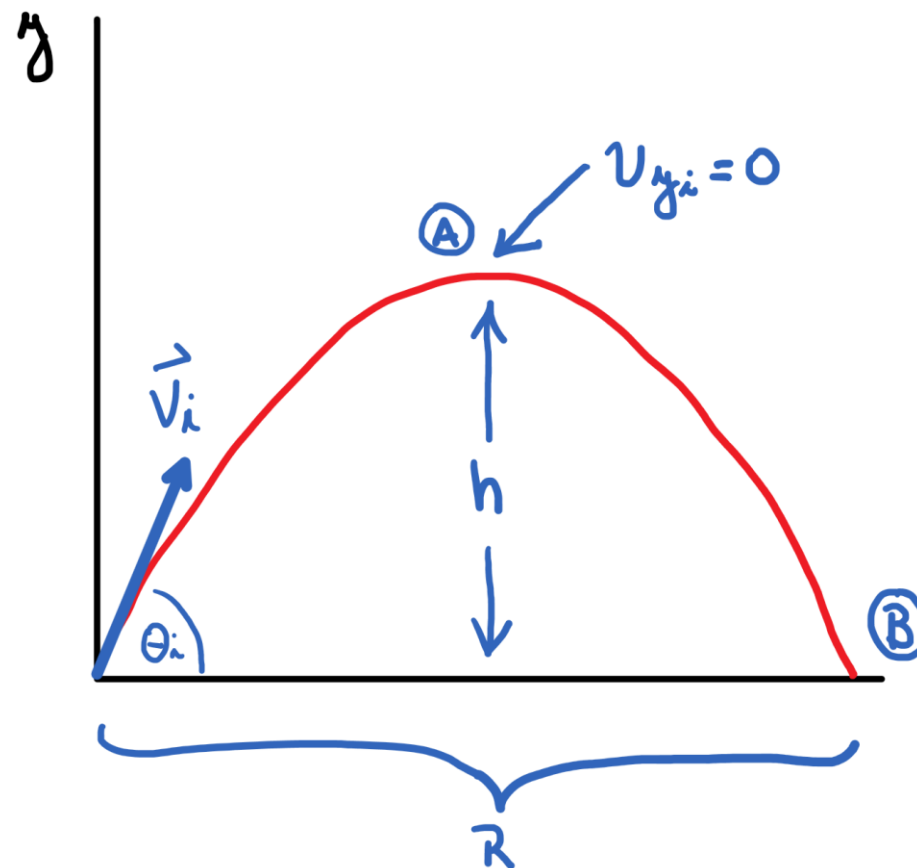


MOVIMIENTO DE PROYECTIL

Consideremos el caso de una partícula que es lanzada con una velocidad $\vec{v}_i$ formando un ángulo θ_i .

De este movimiento nos van a interesar por ahora, dos puntos:

- El punto A es en el cual la partícula se va a encontrar en la posición $(R/2, h)$. Donde h es la altura máxima que alcanza el proyectil.
- El punto B, es la posición en la cuál el proyectil vuelve al suelo. Tiene por coordenadas $(R, 0)$.



MOVIMIENTO DE PROYECTIL

Encontremos la altura máxima que alcanza el proyectil.

Cuando el proyectil esta en su punto más alto, su **velocidad v_y es nula**.

Supongamos que en el tiempo $t = t_s$, se cumple que:

$$\begin{aligned}v(t) &= v_{yi} - gt \\ \rightarrow v(t_s) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= v_{yi} - gt_s \\ \rightarrow t_s &= \frac{v_{yi}}{g}\end{aligned}$$

Por definición $v_{yi} = v_i \sin \theta_i$, reemplazando en la ecuación anterior:

$$t_s = \frac{v_i \sin \theta_i}{g}$$

Tiempo que va a demorar el cuerpo en llegar al punto más alto.

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

Luego, reemplazando el tiempo t_s en la función posición asociada al eje y, tenemos que:

$$y(t) = v_i \sin \theta_i t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$\rightarrow y(t = t_s) = h$$

$$h = v_i \sin \theta_i t_s - \frac{1}{2} g t_s^2$$
$$h = v_i \sin \theta_i \frac{v_i \sin \theta_i}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right)^2$$
$$\rightarrow h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$

Altura máxima que alcanza el cuerpo, que solo depende de la velocidad inicial y el ángulo con el cuál es lanzado.

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

El **tiempo de vuelo** corresponde al tiempo que la partícula esta en el aire.

Como ya vimos, el tiempo que se demora un cuerpo en caída libre en alcanzar su altura máxima es el mismo que se demora en tocar el suelo desde esa altura. Por lo tanto, el tiempo de vuelo t_v es:

$$t_v = 2t_s$$
$$\rightarrow t_v = 2 \frac{v_i \sin \theta_i}{g}$$

Por lo tanto, el tiempo de vuelo depende únicamente de v_i , θ_i y g .

MOVIMIENTO DE PROYECTIL

El alcance **R** de un proyectil, es la distancia que hay entre el punto de llegada y el punto de lanzamiento del proyectil.

Lo que significa que, debemos reemplazar el tiempo t_v en la ecuación de posición asociada al eje x:

$$x(t) = x_i + v_{xi}t$$
$$\rightarrow x(t = t_v) = R$$

$$R = v_i \cos \theta_i t_v$$
$$R = \frac{2v_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

$$\rightarrow R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

MOVIMIENTO EN 2D

Problema 32:

Usted lanza un proyectil con una velocidad inicial de $20[\text{m/s}]$ formando un ángulo con el suelo de 30°

- Calcule el tiempo en que se demora en llegar a la mitad de la altura del punto más alto.
 - ¿Qué velocidad tiene en ese punto?
 - ¿Cuál es el ángulo de la velocidad?
 - ¿Cuál es la velocidad justo antes de tocar el suelo?
-

MOVIMIENTO EN 2D

Problema 33:

Usted lanza ahora el mismo proyectil con una velocidad inicial de $20[\text{m/s}]$ pero, ahora formando un ángulo con el suelo de 45°

- Calcule el tiempo en que se demora en llegar a la mitad de la altura del punto más alto.
 - ¿Qué velocidad tiene en ese punto?
 - ¿Cuál es el ángulo de la velocidad?
 - ¿Cuál es el alcance del proyectil?
-

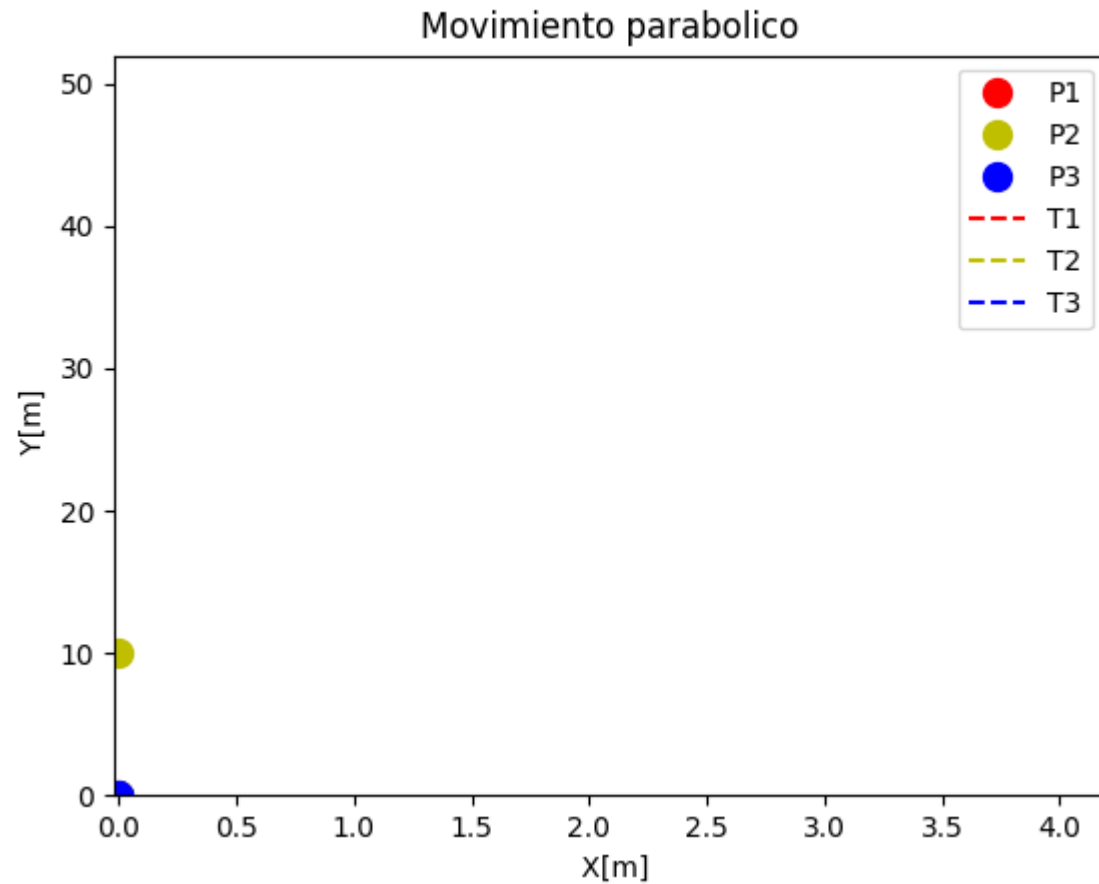
MOVIMIENTO EN 2D

Problema 34:

Usted lanza el mismo proyectil con una velocidad inicial de $20[\text{m/s}]$ desde una altura inicial de 10 metros, formando un ángulo con el suelo de 30°

- Calcule el tiempo en que se demora en llegar a la mitad de la altura del punto más alto.
 - ¿Qué velocidad tiene en ese punto?
 - ¿Cuál es el ángulo de la velocidad?
 - Calcule el alcance del proyectil.
-

MOVIMIENTO EN 2D



MOVIMIENTO EN 2D

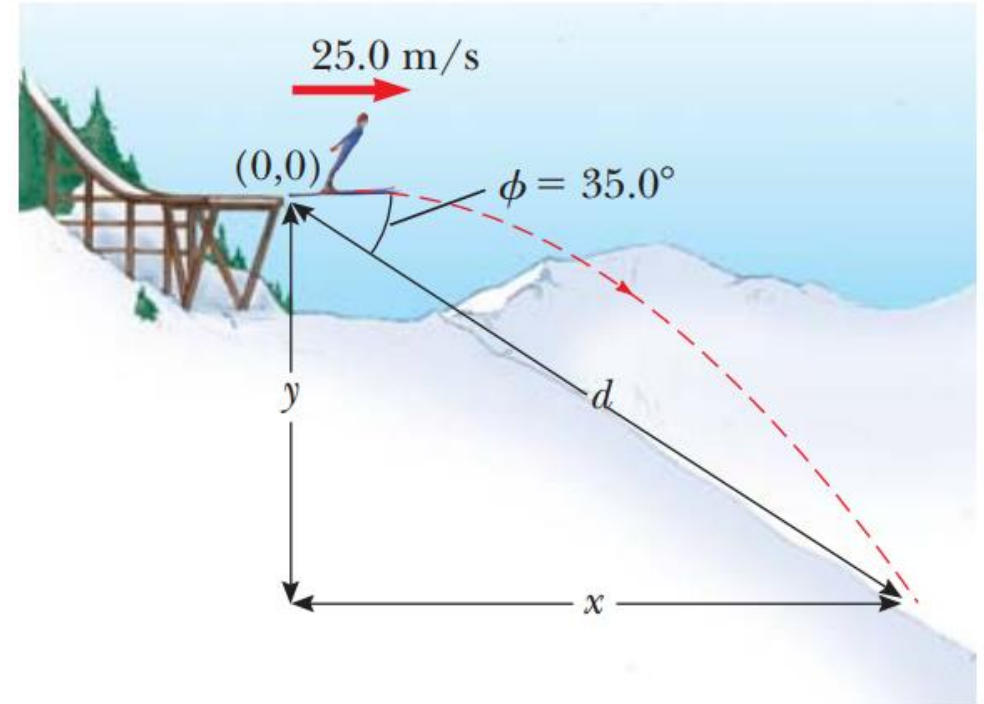
Problema 35:

Una esquiadora en las olimpiadas de invierno sale impulsada horizontalmente con una velocidad de 25 [m/s] . Si la rampa de aterrizaje forma un ángulo $\phi = 35,0^\circ$, ¿Cuál es el alcance de la esquiadora?

Datos relevantes:

$$\cos(35) = 0,81$$

$$\sin(35) = 0,57$$



MOVIMIENTO EN 2D

Problema 36:

En el programa de bachillerato, se compran dos maquinas lanzadoras de proyectiles. Una se coloca al nivel de suelo, lanza un proyectil formando un ángulo θ con una velocidad inicial v_i .

Coloca la segunda maquina de tal forma que esta en las coordenadas $(0, h)$, donde h es la altura máxima que alcanza el proyectil.

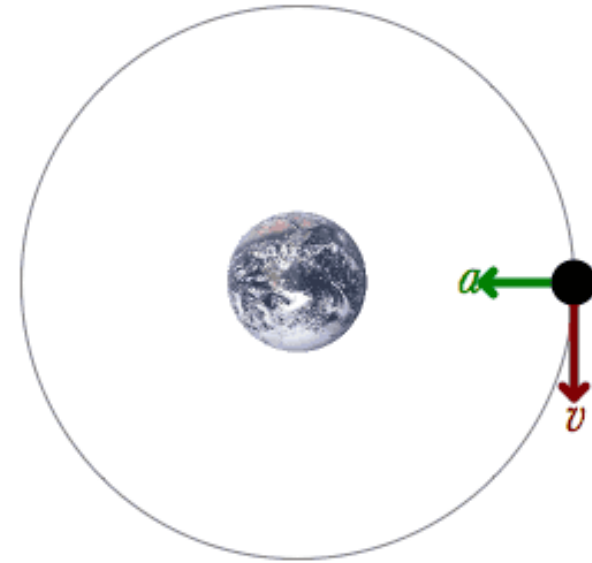
¿Con que velocidad y ángulo debe ser lanzado un proyectil desde la segunda maquina, para que impacte al primer proyectil cuando se encuentra en las coordenadas $\left(\frac{R}{2}, h\right)$?

MOVIMIENTO CIRCULAR

Un movimiento circular, es aquel en el cual la trayectoria descrita por la partícula es una curva.

El movimiento circular uniforme recibe ese nombre porque la partícula **mantiene su rapidez constante**, lo que implica que la trayectoria descrita por la partícula es una circunferencia.

Debemos dejar en claro que, **si la rapidez es constante la velocidad puede ser variable**. En la animación, se observa que el vector velocidad va variando conforme el cuerpo se va moviendo, por lo que en un movimiento circular uniforme existe una aceleración debido a la variación de la velocidad.

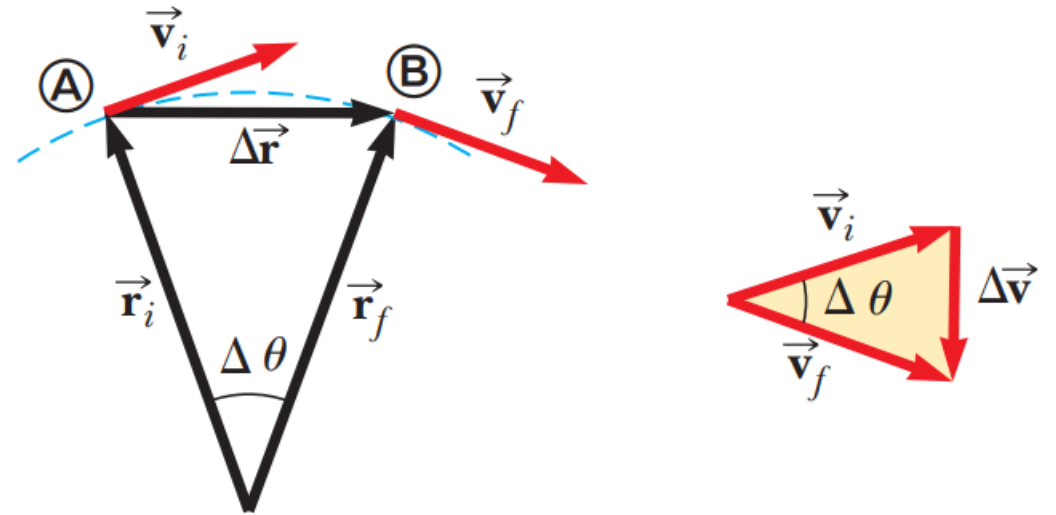


MOVIMIENTO CIRCULAR

Supongamos que un cuerpo se mueve describiendo un movimiento circular uniforme.

En el punto A, se encuentra en el tiempo t_i en la posición $\vec{r}_i$ y tiene una velocidad tangencial $\vec{v}_i$.

En el punto B, se encuentra en el tiempo t_f en la posición $\vec{r}_f$ y tiene una velocidad tangencial $\vec{v}_f$.



Podemos demostrar que los triángulos formados por las posiciones y velocidades son semejantes. Lo que nos permite obtener la siguiente relación:

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{r}$$

Con $v = v_i = v_f$ y $r_i = r_f = r$.

MOVIMIENTO CIRCULAR

Por definición podemos escribir la aceleración promedio como:

$$|\vec{a}_p| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$
$$|\vec{a}_p| = \frac{v}{r} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

Ahora, si consideramos que los puntos A y B se hacen cercanos entre sí, la magnitud de la aceleración se convierte en:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Donde a_c es la magnitud de **aceleración centrípeta**. Recibe este nombre porque siempre apunta hacia el centro.

MOVIMIENTO CIRCULAR

Un movimiento circular uniforme, es un **movimiento periódico** en el cual se van **repitiendo** conforme avanza el tiempo **las posiciones** de la partícula.

Por lo que se define el **periodo T** de un movimiento como el tiempo que se demora en completar un ciclo.

Sin ir más lejos, como en un periodo T se completa una vuelta, podemos calcular la rapidez de la partícula como:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Por definición, el valor de la rapidez v es constante para cualquier punto en la circunferencia.

MOVIMIENTO CIRCULAR

Problema 37:

Sabiendo que el radio de la tierra es de $1,496 \times 10^{11} [m]$, calcule la aceleración centrípeta que experimenta la tierra si la orbita alrededor del Sol se considera circular. Compare su resultado con el valor de aceleración de gravedad.

MOVIMIENTO CIRCULAR

Del MCU podemos observar que los arcos que recorre la partícula para un intervalo de tiempo fijo son constantes.

Podemos escribir dicha relación de la siguiente forma:

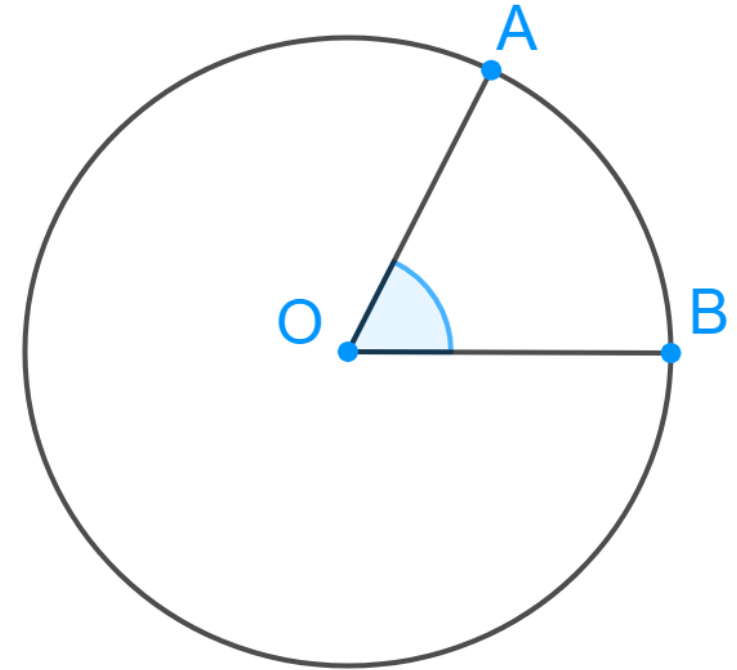
$$S = R\theta$$

Donde S es el arco entre los puntos A y B, y θ es el ángulo del centro de la circunferencia de radio R .

Si dividimos la expresión anterior por Δt , obtenemos que:

$$v = R\omega$$

Donde v corresponde a la rapidez tangencial de la partícula y ω corresponde a la velocidad angular de la partícula.



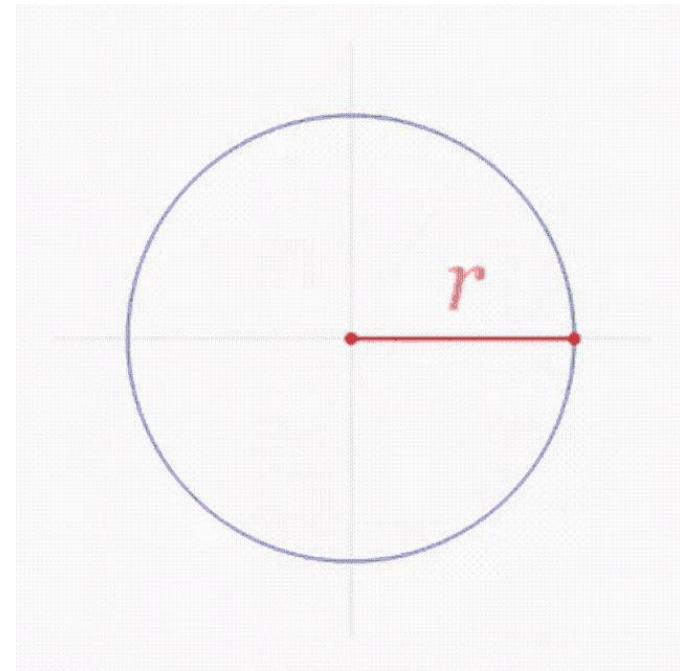
MOVIMIENTO CIRCULAR

Una medida muy utilizada en física es el **Radian**, unidad de medida de ángulos que equivale al ángulo central de una circunferencia cuando el arco mide lo mismo que los radios.

Se define que en una circunferencia hay exactamente **2π Radianes**, de esta forma se puede obtener una relación entre grados y radianes.

El termino ω se mide en $[rad/s]$, y si relacionada con el periodo T de la siguiente forma:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



MOVIMIENTO CIRCULAR

Obtengamos los vectores posición velocidad y aceleración para este movimiento:

Podemos describir la posición de un punto en particular como:

$$\vec{r}(t_1) = R \cos \theta_1(t) \hat{x} + R \sin \theta_1(t) \hat{y}$$

Pero esto solo nos plantea que debe existir una relación entre el ángulo y el tiempo.

En un periodo de tiempo T sabemos que se completan 2π radianes, por lo tanto, solo para el movimiento circular uniforme podemos decir que:

$$\begin{aligned} \frac{T}{t} &= \frac{2\pi}{\theta} \\ \theta &= \frac{2\pi}{T} t \end{aligned}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

Por lo tanto, podemos escribir la posición como:

$$\vec{r}(t) = R \cos \omega t \hat{x} + R \sin \omega t \hat{y}$$

Derivando, obtenemos que la velocidad:

$$\vec{v}(t) = -\omega R \sin \omega t \hat{x} + \omega R \cos \omega t \hat{y}$$

De la cual, obtenemos que la rapidez es:

$$v = \omega R$$

Por otra parte, la aceleración es:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R \cos \omega t \hat{x} - \omega^2 R \sin \omega t \hat{y}$$

Donde, el modulo de la aceleración es:

$$a_c = \omega^2 R$$
