Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do* semestre de 2022

Ayudantía 12
Integración y Áreas
25/11/2022

En esta ayudantía haremos uso de los distintos métodos de integración para resolver integrales definidas e indefinidas. Además, aplicaremos la integral para el cálculo del área de una región entre dos curvas.

Objetivos:

- Aplicar los métodos de integración para la resolución de integrales definidas e indefinidas.
- Calcular el área de una región en el plano mediante integrales.

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

   a) $\displaystyle\int x^4 \ln(3x)dx.$

   Solución: En primer lugar, integramos por partes, haciendo el cambio

$$\begin{aligned} u &= \ln(3x) &\implies& \quad du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv &= x^4\,dx &\implies& \quad v = \frac{x^5}{5}\,. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x^4 \ln(3x)dx &= \frac{x^5}{5}\ln(3x) - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^5}{5}\ln(3x) - \frac{1}{5}\int x^4\,dx \\ &= \frac{x^5}{5}\ln(3x) - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5} + c, \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int x^4 \ln(3x)dx = \frac{x^5}{5}\ln(3x) - \frac{1}{25}x^5 + c, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)dx.$

Solución: Consideremos

$$\begin{array}{rcl} u=\cos(x) & \Longrightarrow & du=-\operatorname{sen}(x)dx \\ dv=e^x dx & \Longrightarrow & v=e^x \end{array}$$

Luego, integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx &= e^x\cos(x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= 0-\cos\big(-\frac{\pi}{4}\big)e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \end{aligned}$$

Ahora, considerando

$$\begin{array}{cc} f=\operatorname{sen}(x) & g'=e^x dx \\ f'=\cos(x)dx & g=e^x \end{array}$$

e integrando por partes se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx &= e^x\operatorname{sen}(x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx \\ &= -\operatorname{sen}\big(-\frac{\pi}{4}\big)e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx \end{aligned}$$

Ahora, volviendo a nuestra integral original, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx &= -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx = 1 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\,dx\ .$$

De donde,

$$2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\, dx = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

2. Resuelva las siguientes integrales de funciones racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 2x - 3}\, dx.$

Solución: Descomponemos en fracciones parciales, es decir, buscamos constantes A y B tales que

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

es decir, obtenemos la igualdad de polinomios

$$2 = A(x+1) + B(x-3)$$

dando valores a x, por ejemplo $x = -1$ y $x = 3$ se concluye que

$$A = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad B = -\frac{1}{4}\,.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/2}{x+1}\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 - 2x - 3}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + c, \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\, dx.$

Solución: En primer lugar resolvemos la integral indefinida, para ello, manipulando algebraicamente la expresión, se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+4}\, dx &= \int \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4}\, dx \\ &= \underbrace{\int \frac{x}{x^2+4}\, dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2+4}\, dx}_{J_2} \end{aligned}$$

Donde,

- Para J_1, hacemos el cambio de variables

$$w = x^2 + 4 \qquad \Longrightarrow \qquad dw = 2x\, dx,$$

entonces,

$$x\, dx \; = \; \frac{dw}{2}$$

Por lo cual, la integral en términos de la nueva variable está dada por

$$\int \frac{x}{x^2+4}\, dx \; = \; \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\, dw\, .$$

En efecto,

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\, dw = \frac{1}{2}\ln(w) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Ahora, volviendo a la variable original, se tiene

$$\int \frac{x}{x^2+4}\, dx \; = \; \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

- Para J_2, notemos que

$$\int \frac{3}{x^2+4}\, dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\, dx.$$

Luego, hacemos el cambio de variables

$$u = \frac{x}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad du = \frac{dx}{2}.$$

De manera que,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\, dx \; &= \; \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\, du \\ &= \; \frac{3}{2}\arctan(u) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{3}{x^2+4}\, dx = \frac{3}{2}\arctan\!\left(\frac{x}{2}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Finalmente, ahora conocidas J_1 y J_2, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+4}\, dx \; &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + k + \frac{3}{2}\arctan\!\left(\frac{x}{2}\right) + c, \qquad c, k \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan\!\left(\frac{x}{2}\right) + l, \qquad l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donde, $l = c + k$ es una nueva constante. Por lo tanto, ahora evaluando la integral definida, se tiene

$$\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan\!\left(\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^2 = \frac{3\pi}{8} + \ln(\sqrt{2})\, .$$

3. Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = \dfrac{x}{x+2}$ e $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+12}}$ para $0 \leq x \leq 6$.

Solución: En primer lugar, considerando $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+12}}$, ambas funciones continuas en $]-2,+\infty[$. Luego,

$$f(x) = g(x) \qquad \iff \qquad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2\,.$$

Ahora, para decidir el signo de la expresión $|f(x)-g(x)|$ evaluamos algunos puntos, por ejemplo $x=1$ y $x=4$ y se tiene $f(x)-g(x) \leq 0$ y $f(x)-g(x) > 0$ respectivamente. Por lo tanto

- Para todo $x \in]0,2[$, se tiene que
$$f(x) < g(x)\,.$$
- Para todo $x \in]2,6[$, se tiene que
$$g(x) < f(x)\,.$$

Por lo cual, el área entre las curvas está dada por

$$\begin{aligned} A = \int_0^6 |f(x)-g(x)|\,dx &= \int_0^2 f(x)-g(x)\,dx + \int_2^6 g(x)-f(x)\,dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}\,dx + \int_2^6 \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} - \frac{x}{x+2}\,dx \end{aligned}$$

Estimamos las integrales indefinidas

$$I_1 = \int \frac{x}{x-2}\,dx = \int 1 - \frac{2}{x-2}\,dx = x - 2\ln|x-2| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Haciendo

$$u = x^2 + 12 \qquad \Longrightarrow \qquad du = 2x\,dx,$$

así,

$$I_2 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \sqrt{x^2+12} + d, \quad d \in \mathbb{R}\,.$$

Ahora, evaluando el área, se concluye

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \frac{x}{x+2}\,dx - \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}\,dx + \int_2^6 \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}\,dx - \int_2^6 \frac{x}{x+2}\,dx \\ &= [x - 2\ln|x-2|]\Big|_0^2 - \left[\sqrt{x^2+12}\right]\Big|_0^2 + \left[\sqrt{x^2+12}\right]\Big|_2^6 - [x-2\ln|x-2|]\Big|_2^6 \\ &= 6\sqrt{3} - 10 \quad [u^2]\,. \end{aligned}$$