



Ayudantía 12

Integración y Áreas

25/11/2022

En esta ayudantía haremos uso de los distintos métodos de integración para resolver integrales definidas e indefinidas. Además, aplicaremos la integral para el cálculo del área de una región entre dos curvas.

Objetivos:

- Aplicar los métodos de integración para la resolución de integrales definidas e indefinidas.
- Calcular el área de una región en el plano mediante integrales.

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

a) $\int x^4 \ln(3x) dx.$

Solución: En primer lugar, integramos por partes, haciendo el cambio

$$\begin{aligned} u = \ln(3x) &\implies du = \frac{3}{x} dx \\ dv = x^4 dx &\implies v = \frac{x^5}{5}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int x^4 \ln(3x) dx &= \frac{x^5}{5} \ln(3x) - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{3}{x} dx \\ &= \frac{x^5}{5} \ln(3x) - \frac{3}{5} \int x^4 dx \\ &= \frac{x^5}{5} \ln(3x) - \frac{3}{5} \cdot \frac{x^5}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int x^4 \ln(3x) dx = \frac{x^5}{5} \ln(3x) - \frac{3}{25} x^5 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx.$

Solución: Consideremos

$$\begin{aligned} u = \cos(x) &\implies du = -\operatorname{sen}(x) dx \\ dv = e^x dx &\implies v = e^x \end{aligned}$$

Luego, integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx &= e^x \cos(x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \operatorname{sen}(x) dx \\ &= 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \operatorname{sen}(x) dx \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \operatorname{sen}(x) dx \end{aligned}$$

Ahora, considerando

$$\begin{aligned} f &= \operatorname{sen}(x) & g' &= e^x dx \\ f' &= \cos(x) dx & g &= e^x \end{aligned}$$

e integrando por partes se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \operatorname{sen}(x) dx &= e^x \operatorname{sen}(x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx \\ &= -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx \end{aligned}$$

Ahora, volviendo a nuestra integral original, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx &= -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \operatorname{sen}(x) dx \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx = 1 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx .$$

De donde,

$$2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx = 1 \quad \implies \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2}.$$

2. Resuelva las siguientes integrales de funciones racionales.

a) $\int \frac{2}{x^2 - 2x - 3} dx.$

Solución: Descomponemos en fracciones parciales, es decir, buscamos constantes A y B tales que

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1}$$

es decir, obtenemos la igualdad de polinomios

$$2 = A(x + 1) + B(x - 3)$$

dando valores a x , por ejemplo $x = -1$ y $x = 3$ se concluye que

$$A = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1/2}{x - 3} - \frac{1/2}{x + 1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 - 2x - 3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 3} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x - 3| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 1} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) $\int_0^2 \frac{x + 3}{x^2 + 4} dx.$

Solución: En primer lugar resolvemos la integral indefinida, para ello, manipulando algebraicamente la expresión, se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{x^2 + 4} dx &= \int \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{3}{x^2 + 4} dx \\ &= \underbrace{\int \frac{x}{x^2 + 4} dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2 + 4} dx}_{J_2} \end{aligned}$$

Donde,

- Para J_1 , hacemos el cambio de variables

$$w = x^2 + 4 \quad \implies \quad dw = 2x \, dx,$$

entonces,

$$x \, dx = \frac{dw}{2}$$

Por lo cual, la integral en términos de la nueva variable está dada por

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} \, dw.$$

En efecto,

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{w} \, dw = \frac{1}{2} \ln(w) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ahora, volviendo a la variable original, se tiene

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Para J_2 , notemos que

$$\int \frac{3}{x^2 + 4} \, dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \, dx.$$

Luego, hacemos el cambio de variables

$$u = \frac{x}{2} \quad \implies \quad du = \frac{dx}{2}.$$

De manera que,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \, dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} \, du \\ &= \frac{3}{2} \arctan(u) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{3}{x^2 + 4} \, dx = \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Finalmente, ahora conocidas J_1 y J_2 , obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+4} \, dx &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + k + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c, \quad c, k \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + l, \quad l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donde, $l = c + k$ es una nueva constante. Por lo tanto, ahora evaluando la integral definida, se tiene

$$\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right] \Big|_0^2 = \frac{3\pi}{8} + \ln(\sqrt{2}).$$

3. Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = \frac{x}{x+2}$ e $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}$ para $0 \leq x \leq 6$.

Solución: En primer lugar, considerando $f(x) = \frac{x}{x+2}$ y $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}$, ambas funciones continuas en $] -2, +\infty[$. Luego,

$$f(x) = g(x) \iff x = 0 \text{ y } x = 2.$$

Ahora, para decidir el signo de la expresión $|f(x) - g(x)|$ evaluamos algunos puntos, por ejemplo $x = 1$ y $x = 4$ y se tiene $f(x) - g(x) \leq 0$ y $f(x) - g(x) > 0$ respectivamente. Por lo tanto

- Para todo $x \in]0, 2[$, se tiene que

$$f(x) < g(x).$$

- Para todo $x \in]2, 6[$, se tiene que

$$g(x) < f(x).$$

Por lo cual, el área entre las curvas está dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 f(x) - g(x) dx + \int_2^6 g(x) - f(x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx + \int_2^6 \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} - \frac{x}{x+2} dx \end{aligned}$$

Estimamos las integrales indefinidas

$$I_1 = \int \frac{x}{x-2} dx = \int 1 - \frac{2}{x-2} dx = x - 2 \ln |x-2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Haciendo

$$u = x^2 + 12 \implies du = 2x dx,$$

así,

$$I_2 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \sqrt{x^2+12} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Ahora, evaluando el área, se concluye

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \frac{x}{x+2} dx - \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx + \int_2^6 \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx - \int_2^6 \frac{x}{x+2} dx \\ &= [x - 2 \ln |x-2|] \Big|_0^2 - [\sqrt{x^2+12}] \Big|_0^2 + [\sqrt{x^2+12}] \Big|_2^6 - [x - 2 \ln |x-2|] \Big|_2^6 \\ &= 6\sqrt{3} - 10 \quad [u^2]. \end{aligned}$$