Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Ayudantía 8
Sumas notables e integral de Riemann
28/10/2022

En este taller, calcularemos la suma de n términos consecutivos de una sucesión y aplicaremos las propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables, como la suma telescópica, suma de números naturales, de cuadrados y cubos y la suma geométrica.
Posteriormente, calcularemos la suma superior de Riemann de una función cuadrática en un intervalo dado con el objetivo de determinar el valor de la respectiva integral definida mediante el límite de dicha suma superior.
Finalmente, si el tiempo lo permite, calcularemos el término general de una sucesión definida recursivamente para luego determinar la suma de los términos de dicha sucesión.

Objetivos:

- Aplica propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables para calcular la suma de los términos de una sucesión.
- Construye la suma superior de Riemann de una función monótona en un intervalo.
- Calcula la integral definida de una función cuadrática mediante el límite de su suma superior.
- Calcula el término general de una sucesión definida recursivamente

Ejercicios Propuestos

1. Utilice la notación Σ de sumatoria y sus propiedades para calcular una fórmula de las siguientes expresiones

   a) $1 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$.

   Solución: En primer lugar, escribimos la suma anterior con notación de sumatorias

   $$1 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} \left(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1\right).$$

   Luego, aplicando propiedades de linealidad del signo de sumatorias, se tiene

   $$\sum_{k=1}^{n} \left(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1\right) = 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\,.$$

Ahora, aplicando fórmulas de sumatorias notables, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 &= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 - 12\sum_{k=1}^{n}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 \\
&= 8\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= 2\big(n(n+1)\big)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n \\
&= n\big[(n+1)(2n^2-2n+1) - 1\Big) \\
&= n(2n^3-n) \\
&= 2n^4 - n^2\,.
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2}$.

Solución: Comenzaremos manipulando algebraicamente la expresión anterior y extraemos factores comunes, en efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-2)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2} &= \sum_{k=1}^{n}(-2)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{2} \\
&= \frac{(-2)^{n+2}}{9}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicamos la suma geométrica con $r = -\dfrac{2}{3} \neq 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k} &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}} \\
&= -\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-2)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2} &= \frac{(-2)^{n+2}}{9}\cdot -\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right] \\
&= \frac{(-2)^{n+3}}{45}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

c) $\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right)-\left(\frac{i-1}{i^2}\right).$

Solución: En primer lugar, notemos que al considerar la sucesión $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$, la suma que queremos calcular se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right)-\left(\frac{i-1}{i^2}\right)=\sum_{i=1}^{k}\big(a_i-a_{i-1}\big)$$

Luego, aplicamos propiedad telescópica se concluye que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right)-\left(\frac{i-1}{i^2}\right)=\sum_{i=1}^{k}\big(a_i-a_{i-1}\big) &= a_k-a_0\\ &= \frac{k}{(k+1)^2}-\frac{0}{(0+1)^2}\\ &= \frac{k}{(k+1)^2}\,.\end{aligned}$$

2. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=x^2+x$ y el intervalo $I=[1,7]$.

a) Muestre que f es creciente en el intervalo I.

Solución: En primer lugar, notamos que f es una función polinomial, luego diferenciable y $f'(x)=2x+1$. Además, para todo $x\in I$, se tiene

$$\begin{aligned}1\le x\le 7 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\le x\le 14\\ &\Longleftrightarrow \quad 3\le 2x+1\le 15\\ &\Longleftrightarrow \quad 3\le f'(x)\le 15\end{aligned}$$

Es decir, en particular para todo $x\in I: f'(x)>0$. Por lo tanto f es una función creciente para todo $x\in[1,7]$.

b) Calcule la suma superior de Riemann, $S(f,P_n)$, en el intervalo I subdividiendo I en n-subintervalos I_i de igual longitud, Δx. Para ello, recuerde que si $I=[a,b]$ entonces

$$\Delta x=\frac{b-a}{n};\;\; I_i=[a+(i-1)\Delta x, a+i\Delta x], i=1,2,\ldots,n$$

Además, si f es creciente en $[a,b]$ entonces

$$S(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\cdot\Delta x$$

Solución: Para determinar la suma superior de f con la partición regular I_n del intervalo I, debemos primero determinar el largo de los sub-intervalos. Luego, tenemos que

$$\Delta x=\frac{7-1}{n}=\frac{6}{n},\ \forall\, i=1,...,n\,.$$

Para determinar los elementos de la partición, notemos que $x_0 = 1$ y $x_n = 7$. Como es una partición regular, los elementos están en progresión aritmética, es decir,

$$x_i = x_0 + \frac{6}{n} \cdot i = 1 + \frac{6}{n} \cdot i\,.$$

Ahora bien, en virtud del ítem precedente, notemos que la función es creciente en el intervalo $[1, 7]$. Entonces, la suma de Riemann superior para la función f en el intervalo I, está dada por:

$$\begin{aligned}
S(f, I_n) &= \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(1 + i\Delta x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} f\left(1 + \frac{6i}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} \left[\left(1 + \frac{6i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{6i}{n}\right)\right].
\end{aligned}$$

Desarrollando, tenemos que

$$\begin{aligned}
S(f, I_n) &= \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{6i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{6i}{n}\right)\right]. \\
&= \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{12i}{n} + \frac{36i^2}{n^2} + 1 + \frac{6i}{n}\right] \\
&= \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[2 + \frac{18i}{n} + \frac{36i^2}{n^2}\right] \\
&= \frac{6}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{18i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{36i^2}{n^2}\right] \\
&= \frac{6}{n} \left[2n + \frac{18}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{36}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \frac{6}{n} \left[2n + 9(n+1) + \frac{6}{n}(2n^2 + 3n + 1)\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S(f, I_n) = 138 + \frac{162}{n} + \frac{36}{n^2}.$$

c) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f, P_n)$ y proponga un resultado para $\displaystyle\int_1^7 (x^2 + x)dx$.

Solución: Para calcular la integral, por medio de la suma superior anterior, determinamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} S(f, I_n) = \lim_{n\to\infty} 138 + \frac{162}{n} + \frac{36}{n^2} = 138$$

Por lo tanto,

$$\int_1^7 x^2 - x\, dx = 138\,.$$