Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Pauta Control 1

23/09/2022

Instrucciones:

- **Disponen de 30 minutos para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Debe responder SOLO uno de los dos problemas que se presentan.**
- **Es individual.**
- **Nombre:**

Problemas:

1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\operatorname{sen}(x)} & , \text{ si } -1 < x < 0. \\ 3 & , \text{ si } x = 0. \\ \dfrac{-2\sqrt{4-2x}+4}{\sqrt{2x+9}-3} & , \text{ si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Determine si f es continua en el valor 0. **(6 puntos)**

Solución: Para determinar si f es continua en $x = 0$ debemos analizar si se cumple

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)\,.$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

En primer lugar, notemos que $f(0) = 3$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Además, estudiamos la existencia del límite mediante los límites laterales a $x = 0$, donde por un lado

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sqrt{4-2x}+4}{\sqrt{2x+9}-3}$$

$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

i) Primera forma para abordar el cálculo del límite:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sqrt{4-2x}+4}{\sqrt{2x+9}-3} \quad = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sqrt{4-2x}+4}{\sqrt{2x+9}-3} \cdot \frac{(-2\sqrt{4-2x}-4)}{(-2\sqrt{4-2x}-4)} \cdot \frac{(\sqrt{2x+9}+3)}{(\sqrt{2x+9}+3)}$$

$\boxed{\textbf{0.8 puntos}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(4(4-2x)-16)}{2x+9-9} \cdot \frac{(\sqrt{2x+9}+3)}{(-2\sqrt{4-2x}-4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-8x}{2x} \cdot \frac{(\sqrt{2x+9}+3)}{(-2\sqrt{4-2x}-4)} \\ &= -4 \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{2x+9}+3)}{(-2\sqrt{4-2x}-4)}\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{0.4 puntos}}$

y $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{2x+9}+3) = 6$, $\lim_{x\to 0^+} (-2\sqrt{4-2x}-4) = -8 \neq 0$.

$\boxed{\textbf{0.6 puntos}}$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$.

$\boxed{\textbf{0.2 puntos}}$

ii) Segunda forma para abordar el cálculo del límite lateral por la derecha:

Consideremos las funciones $f_1(x) = -2\sqrt{4-2x}+4$ y $f_2(x) = \sqrt{2x+9}-3$, notemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = 0,$$

además, ambas funciones son diferenciables entorno a $x = 0$, por lo cual aplicaremos la regla de L'hopital.

$\boxed{\textbf{0.6 puntos}}$

Así,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{-2}{2\sqrt{4-2x}}\cdot -2}{\dfrac{1}{2\sqrt{2x+9}}\cdot 2} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x+9}}{\sqrt{4-2x}}\,.$$

$\boxed{\textbf{0.6 punto}}$

Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{2x+9} = 3$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{4-2x} = 2 \neq 0$.

$\boxed{\textbf{0.6 puntos}}$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3\,.$$

$\boxed{\textbf{0.2 punto}}$

Ahora determinemos el límite lateral por la izquierda,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 3\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}}\,.$$

$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

Además, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, $\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$ de esta manera se concluye que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3\,.$$

$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

Así,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 3\,.$$

Por lo tanto, f es continua en $x = 0$.

$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$

2. Sea la función $h(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x) + 1}{x^2 + 1}$, $x \in [-1, 1]$.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en $x = 0$. **(5 puntos)**

Solución: La recta tangente a la gráfica de h en $x = 0$ está dada por

$$y = h'(0)(x - 0) + h(0)$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Tenemos que $h(0) = 1$,

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Además,

$$h'(x) = \frac{(\operatorname{arc\,sen}(x) + 1)'(x^2 + 1) - (\operatorname{arc\,sen}(x) + 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\boxed{\textbf{1.5 puntos}}$$

$$h'(x) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (x^2 + 1) - (\operatorname{arc\,sen}(x) + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

Evaluando $h'(x)$ en $x = 0$, $h'(0) = 1$.

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Por lo tanto,

$$y = 1 \cdot x + 1 = x + 1\,.$$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

b) Use el ítem *a*) para aproximar el valor numérico de $h(0.1)$. **(1 punto)**

Solución:

$$h(0,1) \approx y(0,1) = 0,1 + 1 = 1,1$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Por lo tanto, el valor de $h(0,1)$ es aproximadamente $1,1$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$