

Ayudantía 12:

(1)

PA Resolver

$$a) \int x^4 \ln(3x) dx \quad \left| \begin{array}{l} u(x) = \ln(3x) \rightarrow u'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 \\ v'(x) = x^4 \rightarrow v(x) = \frac{x^5}{5} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\ln(3x) x^5}{5} - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{\ln(3x) x^5}{5} - \frac{x^5}{25} + C.$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx$$

Primero buscamos una primitiva:

$$\int e^x \cos(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} u(x) = \cos(x) \rightarrow u'(x) = -\sin(x) \\ v'(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} u(x) = \sin(x) \rightarrow u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x \rightarrow v(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

Entonces

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \sin(x)) - \int e^x \cos(x) dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\cos(x) + \sin(x))}{2} + C$$

Aplicando Regla de Barrow:

(2)

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx &= \frac{1}{2} \left(e^x (\cos(x) + \sin(x)) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 \\&= \frac{1}{2} \left(e^0 (\cos(0) + \sin(0)) - e^{-\frac{\pi}{4}} (\underbrace{\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4})}_{\sqrt{2}}) \right) \\&= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}})\end{aligned}$$

P2] a) $\int \frac{2}{x^2 - 2x - 3} dx = 2 \int \frac{1}{(x-3)(x+1)} dx$

hacemos fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x+1) + B(x-3) \quad \cancel{\neq x}$$

con $x=3$

$$1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

con $x=-1$

$$1 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}$$

Entonces:

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-2x-3} dx &= 2 \int \frac{1}{(x-3)(x+1)} dx \\ &= 2 \int \frac{1/4}{x-3} + \frac{-1/4}{x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

$$b) \int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx \longrightarrow \int \frac{x+3}{x^2+4} dx.$$

observemos que $[x^2+4]' = 2x$. Por lo que acomodamos la integral para llegar a esto:

$$\int \frac{x+3}{x^2+4} dx = \int \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{3}{x^2+4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + 3 \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

esto lo podemos acomodar a una arcotangente.

$$u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} dx$$

observamos que

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} dx$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2+1} 2du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{2} \arctg(u) \\ &= \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Por lo que la integral queda:

(4)

$$\int \frac{x+3}{x^2+4} = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

y usando regla de Barrow:

$$\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(z^2+4) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(0+4) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(0)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{4}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \ln(\sqrt{2}) + \frac{3\pi}{8}$$

B3) calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y = \frac{x}{x+2}$ e $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}$ para $x \in [0, 6]$

Sol: Sean $f(x) = \frac{x}{x+2}$ y $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}$. Los puntos de intersección son los x tales que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+12} = x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+12} - (x+2)) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$\text{La otra opción es } \sqrt{x^2+12} = (x+2) \Leftrightarrow x^2+12 = (x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

Entonces las funciones f y g se intersectan en $x=0$ y $x=2$. ¿Cuál está por encima?

(5)

En $x=1$, vemos que $f(1) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ y

$$g(1) = \frac{1}{\sqrt{1+12}} = \frac{1}{\sqrt{13}} < f(1). \text{ Por lo que en}$$

$[0,2]$, f está por encima de g .

En $x=4$, vemos que

$$f(4) = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3} \text{ y}$$

$$g(4) = \frac{4}{\sqrt{16+12}} = \frac{4}{\sqrt{28}} = \frac{4}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\text{y como } 3 = \sqrt{9} > \sqrt{7} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow f(4) < g(4)$$

Por lo que en $[2,6]$, la función f está por debajo de g . Entonces el área queda como:

$$A = \int_0^2 f(x) - g(x) dx + \int_2^6 g(x) - f(x) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx + \int_2^6 \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} - \frac{x}{x+2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx - \int_2^6 \frac{x}{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx$$

calculemos las primitivas

(6)

$$\textcircled{1} \int \frac{x}{x+2} dx = \int \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} dx = \int 1 - \frac{2}{x+2} dx$$

$$= x - 2 \int \frac{1}{x+2} dx = x - 2 \ln|x+2| + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{2x}^{du}}{\underbrace{\sqrt{x^2+12}}_u} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = x^2+12 \\ du = 2x dx \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{1/2}} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

$$= \frac{1}{2} u^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+12} + C$$

Entonces

$$\int \frac{x}{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+12}} dx = \underbrace{x - 2 \ln|x+2| - \sqrt{x^2+12}}_{F(x)} + C$$

Entonces

$$A = (F(2) - F(0)) - (F(0) - F(2)) = 2F(2) - F(0) - F(0)$$

$$= 2(2 - 2 \ln(4) - \sqrt{16}) + 2 \ln(2) + \sqrt{12} - 6 + 2 \ln(8) + \sqrt{48}$$

$$- 9 \ln(2) + 2 \ln(2) + 6 \ln(2)$$

$$= 4 - 8 - 6 - 4 \ln(2^2) + 2 \ln(2) + 2 \ln(2^3) + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} - 10$$