

P2 → Población inicial: 100

(1)

→ se triplican cada 2 horas

P: población (número de bacterias)

t: tiempo medido en horas. ($t \geq 0$)

a) Encontrar fórmula para $P(t)$.

observar que:

$$P(0) = 100.$$

$$P(2) = 3 \cdot 100$$

$$P(4) = 3 \cdot 3 \cdot 100$$

$$P(6) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 100$$

Por lo que tenemos el patrón $P(2t) = 3^t \cdot 100$.

y por lo tanto, $P(t) = 100 \cdot 3^{t/2}$.

¿Cuántas horas deben transcurrir para que la población sea igual a 800?

Notar que $P(t) = 100 \cdot 3^{t/2} = 100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)}$.

Por lo que $P(t) = 800 \Leftrightarrow 100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)} = 800$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t}{2} \ln(3)} = 8 \Leftrightarrow \frac{t}{2} \ln(3) = \ln(8) \Leftrightarrow t = 2 \frac{\ln(8)}{\ln(3)} = 2 \log_3(8)$$

c) Encuentre una función que modela la velocidad de crecimiento de la población. (2)

Sol:

$$P(t) = 100 \cdot 3^{t/2} = 100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)}$$

$$\Rightarrow P'(t) = 100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)} \cdot \left[\frac{t}{2} \ln(3) \right]' = 100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)} \cdot \frac{\ln(3)}{2}$$
$$= 50 \ln(3) e^{\frac{t}{2} \ln(3)} = 50 \ln(3) \cdot 3^{t/2}$$

$$\rightarrow P(12) = 50 \ln(3) 3^{12/2} = 50 \ln(3) 3^6.$$

d) Encuentre la función inversa de P y explique su significado

Sol: Tenemos que

$$P: [0, \infty[\rightarrow [100, \infty[$$

$$P(t) = 100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)}$$

Despejando para obtener la inversa:

$$P = 100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)} \Leftrightarrow \frac{P}{100} = e^{\frac{t}{2} \ln(3)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{100}\right) = \frac{t}{2} \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\ln(3)} \ln\left(\frac{P}{100}\right) = t$$

Por lo que

(3)

$$t : [100, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

$$t(P) = \frac{2}{\ln(3)} \ln\left(\frac{P}{100}\right)$$

es la función inversa de P y modela, para una población $P \geq 100$ dada, el tiempo $t \geq 0$ que debe transcurrir para que esta población se alcance.

e) se define $q(t) = \frac{P(t) - 100}{t}$,

calcule $\lim_{t \rightarrow 0^+} q(t)$

Sol:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} q(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t) - 100}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{100 e^{\frac{t}{2} \ln(3)} - 100}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{100 (e^{\frac{t}{2} \ln(3)} - 1)}{t} = 100 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{t}{2} \ln(3)} - 1}{t}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} 100 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{t}{2} \ln(3)} \cdot \frac{\ln(3)}{2}}{1} = 100 \frac{\ln(3)}{2} = 50 \ln(3)$$

P2] a) sea $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

(4)

$$f(x) = 3 \cdot 2^x - 10^x$$

i) Determine x tal que $f'(x) = 0$.

Sol: Notar que $f(x) = 3 \cdot 2^x - 10^x = 3 \cdot e^{x \ln(2)} - e^{x \ln(10)}$

Por lo que

$$f'(x) = 3 e^{x \ln(2)} \cdot \ln(2) - e^{x \ln(10)} \cdot \ln(10).$$

De modo que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 e^{x \ln(2)} \cdot \ln(2) = e^{x \ln(10)} \cdot \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{x \ln(2)}}{e^{x \ln(10)}} = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{x(\ln(2) - \ln(10))} = \frac{\log_2(10)}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \ln\left(\frac{2}{10}\right) = \ln\left(\frac{\log_2(10)}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow -x \ln(5) = \ln\left(\frac{\log_2(10)}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = - \frac{\ln\left(\frac{\log_2(10)}{3}\right)}{\ln(5)} = - \log_5\left(\frac{\log_2(10)}{3}\right)$$

Nota: $\ln\left(\frac{2}{10}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1}{5}\right) = \ln(5^{-1}) = -\ln(5)$$

(i) Resuelva $\int_0^1 f(x) dx$

⑤

Sol: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3e^{x \ln(2)} - e^{x \ln(10)} dx$

$$= 3 \int_0^1 e^{x \ln(2)} dx - \int_0^1 e^{x \ln(10)} dx$$

$$= \frac{3}{\ln(2)} \int_0^1 e^{\overbrace{x \ln(2)}^u} \cdot \overbrace{\ln(2) dx}^{du} - \frac{1}{\ln(10)} \int_0^1 e^{\overbrace{x \ln(10)}^u} \overbrace{\ln(10) dx}^{du}$$

$$= \frac{3}{\ln(2)} \int_0^{\ln(2)} e^u du - \frac{1}{\ln(10)} \int_0^{\ln(10)} e^u du$$

$$= \frac{3}{\ln(2)} \left(e^{\overset{2}{\cancel{\ln(2)}}} - \overset{1}{\cancel{e^0}} \right) - \frac{1}{\ln(10)} \left(e^{\overset{10}{\cancel{\ln(10)}}} - \overset{1}{\cancel{e^0}} \right)$$

$$= \frac{3}{\ln(2)} - \frac{9}{\ln(10)}$$

b) Resuelva la ecuación

$$\frac{1}{5 - \log(x)} = 1 - \frac{1}{1 + \log(x)}$$

Restricciones: Necesitamos que

• $\log(x) \neq 5 \Leftrightarrow x \neq 10^5$

• $\log(x) \neq -1 \Leftrightarrow x \neq 10^{-1} = 0.1$

teniendo esto en cuenta, sea $u = \log(x)$. Obtendremos (6)

$$\frac{1}{5-u} = 1 - \frac{1}{1+u}$$

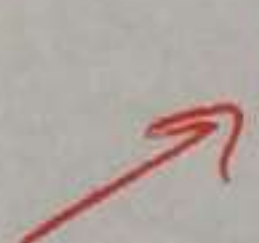
$$\Leftrightarrow \frac{1}{5-u} = \frac{1+u-1}{1+u} = \frac{u}{u+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5-u} = \frac{u}{1+u} \Leftrightarrow 1+u = u(5-u)$$

$$\Leftrightarrow 1+u = 5u-u^2 \Leftrightarrow u^2-4u+1=0$$

$\Delta = 16-4 = 12 > 0$. Por lo que existen dos soluciones:

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Por lo tanto,  Ninguno de estos cae en las restricciones!

$$\cdot \log(x_1) = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = 10^{2+\sqrt{3}}$$

$$\cdot \log(x_2) = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x_2 = 10^{2-\sqrt{3}}$$

P3] q_0 : cantidad inicial

(7)

t : tiempo medido en años.

$q(t)$: cantidad en el tiempo t . Dada por

$$q(t) = q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}}$$

a) Graficar.

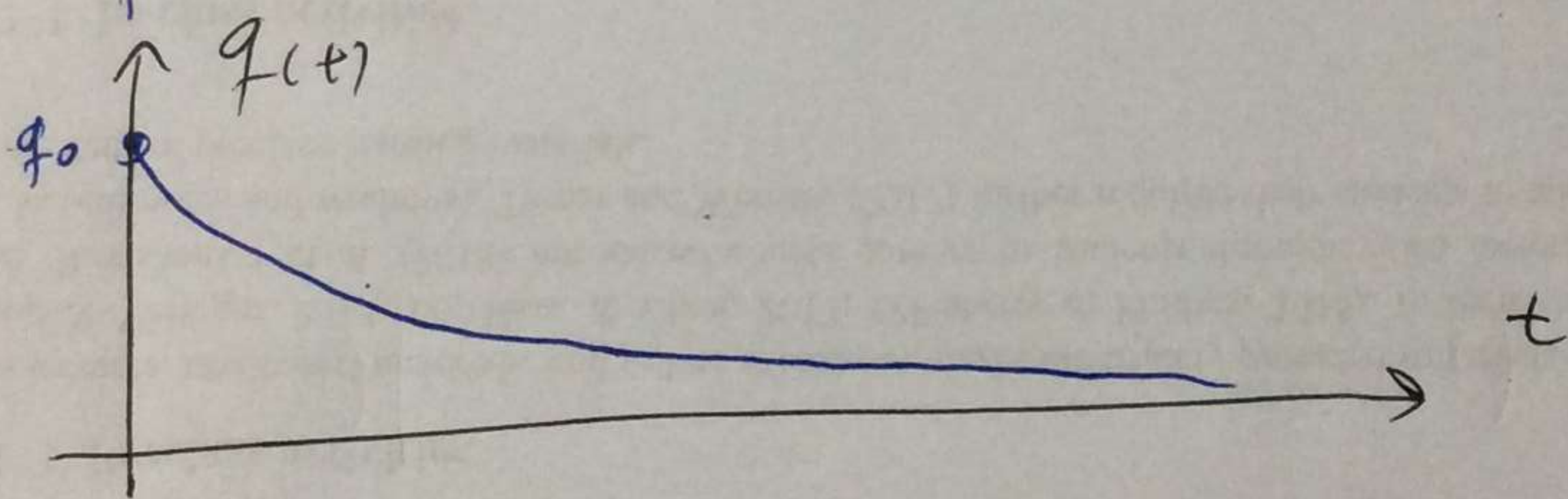
Vemos que la función es exponencial del estilo

$$q(t) = q_0 \cdot 2^{kt} \text{ con } k < 0 \text{ por lo que}$$

modela de crecimiento exponencial. comprobamos

$$\text{además que } q(0) = q_0 \cdot 2^0 = q_0 \cdot 1 = q_0.$$

por lo que el gráfico queda:



b) Vida media.

buscamos t tal que $q(t) = q_0/2$.

$$\Leftrightarrow \cancel{q_0} \cdot 2^{-\frac{t}{1600}} = \frac{\cancel{q_0}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{1600} + 1} = 1 = 2^0 \Leftrightarrow -\frac{t}{1600} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{t}{1600} \Leftrightarrow \boxed{t = 1600}$$

∴ El radio tiene una vida media de 1600 años.

c) Mostrar que $q'(t)$ é $q(t)$

(8)

$$q'(t) = \left[q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}} \right]' = q_0 \left[e^{-\frac{t}{1600} \ln(2)} \right]'$$
$$= q_0 e^{\frac{-t}{1600} \ln(2)} \cdot \frac{-\ln(2)}{1600} = \underbrace{q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}}}_{q(t)} \cdot \frac{-\ln(2)}{1600}$$

$$= \frac{-\ln(2)}{1600} \cdot q(t) \quad \text{e o} \quad q'(t) = \frac{-\ln(2)}{1600} \cdot q(t)$$