Ayudantía 10: Pauta

P1 T: temperatura (en grados celsius)

t: tiempo (en minutos)

T_a: temperatura ambiente (constante)

se cumple

$$T(t) = T_a - M e^{kt} \qquad (k < 0)$$

a) probar que $\frac{dT}{dt} \propto T_a - T(t)$.

Dem: observamos que

$$T(t) = T_a - M e^{kt} \Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} = -M e^{kt} \cdot k$$

$$= k\left(-M e^{kt}\right) = k\left(T(t) - T_a\right) = -k\left(T(t) - T_a\right)$$

Por lo tanto, ya que se tiene $k < 0$, se cumple la proporcionalidad pedida.

b)
- Temperatura inicial es 3°C $\rightarrow T(0) = 3$
- Temperatura ambiente es 30°C $\rightarrow T_a = 30$.
- Temperatura a los 20 min es 12°C $\rightarrow T(20) = 12$.

Determinar t para que $T(t) = 15$.

Tenemos que:

$$T(t) = Ta - M e^{kt}$$
$$= 30 - M e^{kt}$$

como dato,

$$T(0) = 30 - M e^{0} = 30 - M = 3 \Rightarrow M = 27.$$

Entonces..

$$T(t) = 30 - 27 e^{kt}$$

También sabemos que $T(20) = 12$.

$$\therefore T(20) = 30 - 27 e^{20k} = 12 \Rightarrow 18 = 27 e^{20k}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = e^{20k} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 20k \Rightarrow k = \frac{\ln(2/3)}{20}$$

Por lo tanto,

$$T(t) = 30 - 27 e^{\frac{\ln(2/3)}{20} t}$$

Entonces, se busca t para que:

$$T(t) = 15 \iff 30 - 27 e^{\frac{\ln(2/3)}{20} t} = 15$$
$$\iff 15 = 27 e^{\frac{\ln(2/3)}{20} t} \iff \frac{5}{9} = e^{\frac{\ln(2/3)}{20} t}$$
$$\iff \ln\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{\ln(2/3)}{20} t \iff t = \frac{20 \ln(5/9)}{\ln(2/3)}$$

Deben pasar entonces $20 \frac{\ln(5/9)}{\ln(2/3)}$ ~~en~~ minutos para que se cumpla lo pedido.

P2| considere

$f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = xe^{-x}$

a) Graficar f y g.

f| Interfecciones con los ejes

- con y, no existen
- con x, $f(x) = 0 \iff \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$.

Por lo que f interfecta el eje x en $(1,0)$.

Asintotas

- horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{\ln(x)}}{\underset{\to\infty}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$\therefore$ $y=0$ es asintota horizontal de f.

- verticales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln(x)}}{\underset{\to 0^+}{x}} = -\infty$$

$\therefore$ $x=0$ es asintota vertical de f.

Monotonía:

$$f'(x)=\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Por lo que los signos de f' vienen dados por los signos de $1-\ln(x)$. Esta función es decreciente y se anula cuando $1-\ln(x)=0 \iff \ln(x)=1 \iff x=e$. Por lo que tenemos la siguiente tabla para el comportamiento de f:

	0		e		∞
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Se deduce de aquí que f alcanza un máximo global en $x=e$. Obteniendo el valor máximo

$$f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$$

concavidad:

$$f''(x) = \left[\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right]' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4}$$

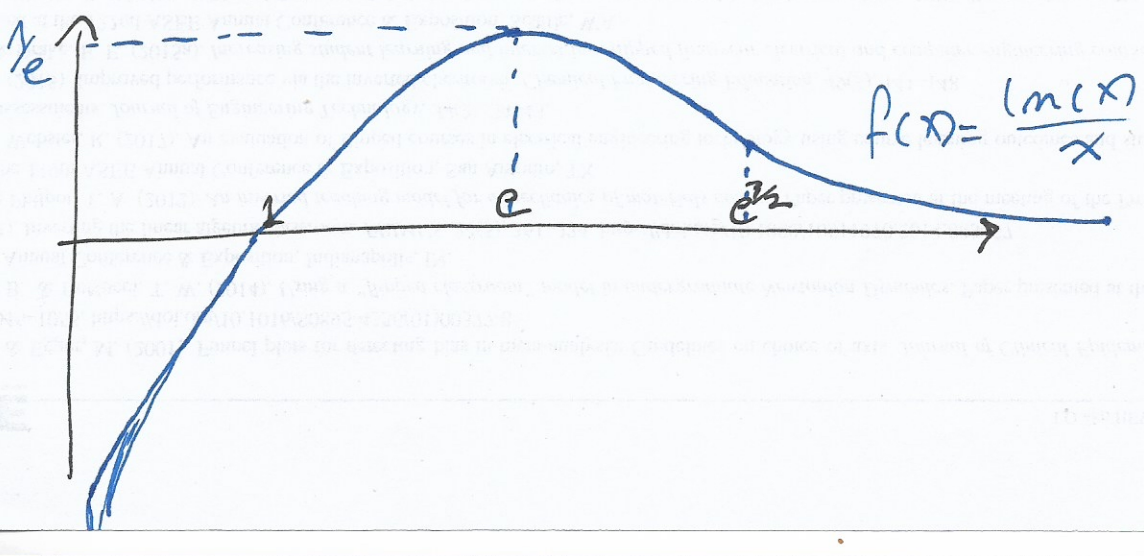
$$= \frac{-x - 2x(1-\ln(x))}{x^4} = \frac{-3x + 2x\ln(x)}{x^4}$$

$$= \frac{x(2\ln(x)-3)}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

Al estar trabajando con $x>0$, los signos de f'' vienen dados por los signos de $2\ln(x)-3$. función creciente que se anula cuando $2\ln(x)-3=0$ $\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$. Por lo que tenemos la siguiente tabla para el comportamiento de f:

	0		e		$e^{3/2}$		∞
f'		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	0	$+$	
f							

Gráfico:



9| Intersecciones con los ejes

6

- con y: $g(0) = 0 \cdot e^{-0} = 0$. Por lo que g intersecta al eje y en $(0,0)$.
- con x: $g(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Por lo que se obtiene el mismo punto de intersección.

Asíntotas:

- horizontales:

- $$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{x}}{\underset{\to\infty}{e^x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

- $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to-\infty}{x}}{\underset{\to 0^+}{e^x}} = -\infty$$

$\therefore$ $y=0$ es asíntota horizontal de g.

- verticales: No existen candidatos.

Monotonía: 7 8

$$g'(x) = \left[\frac{x}{e^{x}}\right]' = \left[x e^{-x}\right]' = 1 \cdot e^{-x} + x(e^{-x})(-1)$$

$$= e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$ Por lo que $1-x$ dicta los signos de g':

x	$-\infty$		1		∞
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

deducimos de esto que g alcanza un máximo global en $x=1$. obteniendo el valor máximo:

$$g(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

concavidad:

$$g''(x) = \left[e^{-x}(1-x)\right]' = (-e^{-x})(1-x) + e^{-x}(-1)$$

$$= (x-1)e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x-1-1) = e^{-x}(x-2)$$

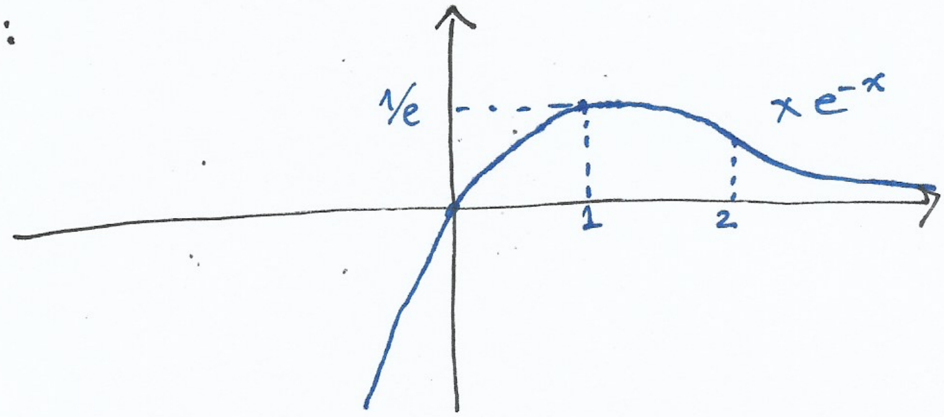
Por lo que $x-2$ dicta los signos de g'':

x	$-\infty$		2		∞
g''		$-$	0	$+$	
g		$\cap$		$\cup$	

Tenemos entonces la siguiente tabla para el comportamiento de g:

	$-\infty$	1		2		∞
g'	$+$	0	$-$		$-$	
g''	$-$		$-$	0	$+$	
g						

gráfico:



b) probar que $\ln(x) < x$ para $x>0$ y que $x < e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sol: En a) se probó que ~~g(x)~~ $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ tiene valor máximo $\frac{1}{e}$. Por lo que para todo $x>0$, se tiene que

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \frac{\ln(x)}{x} < 1$$ y como $x>0$,

tenemos $\ln(x) < x$.

Por otro lado, del máximo de g, se concluye que

$$g(x) = \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow x < e^x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

esto prueba lo pedido ☒

c) ¿Existe número real x tal que $\ln(x) = e^x$? (9)

Para que este número x existiera, tendría que ser positivo para que el logaritmo estuviera bien definido. pero si $x > 0$, de la pregunta anterior sabemos que

$\ln(x) < x < e^x$. por lo que $\ln(x)$ y e^x nunca pueden coincidir

P3 P: población

t: tiempo medido en horas.

$$P(t) = \frac{100\, e^{0.1t}}{1+e^{0.1t}}$$

Determinar la población promedio en las primeras 10 horas

Sol: $$\overline{P} = \frac{1}{10} \int_0^{10} P(t)\, dt = \frac{100}{10} \int_0^{10} \frac{1}{1+e^{0.1t}}\, e^{0.1t}\, dt$$

$$= 10 \int_0^{10} (1+e^{0.1t})^{-1} e^{0.1t}\, dt$$

observar que $[1+e^{0.1t}]' = e^{0.1t} \cdot (0.1)$. Por lo que

$$\overline{P} = 10 \int_0^{10} (1+e^{0.1t})^{-1} \underbrace{e^{0.1t} \cdot \frac{0.1}{0.1}}_{[1+e^{0.1t}]'}\, dt$$

$$= \overset{\to 100}{\frac{10}{0.1}} \int_0^{10} \left(1+e^{0.1t}\right)^{-1} \left[1+e^{0.1t}\right]' dt$$

$$= 100 \ln\left(1+e^{0.1t}\right)\Big|_0^{10}$$

$$= 100\left(\ln\left(1+e^{\overset{\to 1}{\cancel{0.1\cdot 10}}}\right) - \ln\left(1+e^{\overset{\to 0}{\cancel{0.1\cdot 0}}}\right)\right)$$

$$= 100\left(\ln(1+e) - \ln(2)\right) = 100 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

Determinar el instante en que se alcanza.

Buscamos t tal que $P(t) = 100 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \frac{\cancel{100}\, e^{t/10}}{1+e^{t/10}} = \cancel{100} \cdot \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \Rightarrow \frac{e^{t/10}}{1+e^{t/10}} = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{t/10} = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) + e^{t/10} \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{t/10}\left(1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{t/10} = \frac{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}{1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

Nota: Es necesario justificar que esto es positivo para aplicar logaritmo! (lo haré después)

$$\Rightarrow \frac{t}{10} = \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}{1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}\right) \Rightarrow t = 10 \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}{1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}\right)$$

Ahora sí, observar que queremos justificar que

$$\frac{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}{2-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)} > 0.$$ Para esto basta que $0 < \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) < 1$

$\iff 1 < \frac{1+e}{2} < e$

pero $1 < \frac{1+e}{2} < e \iff 2 < 1+e < 2e$

y ambas de estas últimas desigualdades son verdaderas. $\boxtimes$