

Ayudame con esto :

(1)

P1 Sea a_n definida por

$$a_1 = 2 \quad | \quad a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Determine el término general.

Sol: observamos que

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{3}{4} a_1 + 1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + 1$$

$$a_3 = \frac{3}{4} a_2 + 1 = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \cdot 2 + 1 \right) + 1 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot 2 + \frac{3}{4} + 1$$

$$a_4 = \frac{3}{4} a_3 + 1 = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot 2 + \frac{3}{4} + 1 \right) + 1 = \left(\frac{3}{4} \right)^3 \cdot 2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^1 + \left(\frac{3}{4} \right)^0$$

Se observa entonces que

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{3}{4} \right)^k$$

Recordar:

$$\text{Para todo } r \neq 1, \quad \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\text{Por lo que } a_n = 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} = 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + 4(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1})$$

$$= 4 - 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

P2 b) calcular $\sum_{n=1}^k a_n = \sum_{n=1}^k \left(4 - 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \right) = 4k - 2 \sum_{n=1}^k \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$

$$= 4k - 2 \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 4k - 2 \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k}{1 - \frac{3}{4}} = 4k - 8(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k)$$

P2 | utilice la notación de sumatoria y sus propiedades para calcular: (3)

a) $1 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$.

Sol: observar que estamos sumando cubos de números impares. la expresión equivale a

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3$$

Ahora, calculemos la:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^n (8k^3 - 3 \cdot (2k)^2 + 3(2k)(-1)^2 + (-1)^3)$$

$$= \sum_{k=1}^n (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)$$

$$= 8 \sum_{k=1}^n k^3 - 12 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$$

$\hookrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\hookrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\hookrightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ $\hookrightarrow n$

$$= 8 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 2(n(n+1)(2n+1)) + 3n(n+1) - n$$

b) $\sum_{k=1}^n (-2)^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2} = (-2)^n \sum_{k=1}^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

$$= (-2)^n \sum_{k=3}^{n+2} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = (-2)^n \left(\sum_{k=0}^{n+2} \left(-\frac{2}{3}\right)^k - \left(-\frac{2}{3}\right)^0 - \left(-\frac{2}{3}\right)^1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \right)$$

$$= (-2)^n \left(\sum_{k=0}^{n+2} \left(\frac{-2}{3}\right)^k - 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right)$$

$$= (-2)^n \left(\frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+3}}{1 + \frac{2}{3}} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right)$$

$$c) \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{i^2 + 2i + 1} - \frac{i-1}{i^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{(i+1)^2} - \frac{i-1}{i^2} \right) \quad / \text{propiedad telescópica.}$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2} - \frac{1-1}{1^2} = \frac{k}{(k+1)^2}.$$

4

P3] considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + x$ en el intervalo $I = [1, 7]$. (5)

a) Mostrar que f es decreciente en I .

sol: vemos que

$$f'(x) = [x^2 + x]' = 2x + 1. \text{ De modo que}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}. \text{ Por lo}$$

que $f'(x)$ es positiva en $[1, 7]$ y por lo tanto f es decreciente en $[1, 7]$.

b) Calcular la suma superior de Riemann $S(f, P_n)$ en I dividiendo en n subintervalos I_i de igual longitud.

sol: el ancho completo del intervalo  es $7 - 1 = 6$. Por lo que al dividir en n partes se obtiene un ancho de $\Delta_n = \frac{6}{n}$. Para dividir en n partes, se requieren $n+1$ puntos, por lo que los enumeraremos como x_i con $i = 0, 1, \dots, n$ en que $x_0 = 1$ y $x_n = 7$. Se obtiene la fórmula general

$$x_i = 1 + i\Delta_n = 1 + \frac{6i}{n} \quad (i = 0, \dots, n).$$

Los intervalos quedan entonces del tipo:

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] = \left[1 + \frac{6}{n}(i-1), 1 + \frac{6i}{n} \right] \quad (i = 1, \dots, n)$$

Entonces, Para hacer la suma superior, como f es creciente, la altura de cada rectángulo vendrá dada por la imagen del extremo derecho. Así, ⑥

$$S(f; P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \cdot f(x_i)$$

$$= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n f\left(1 + \frac{6i}{n}\right) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left(1 + \frac{6i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{6i}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{12i}{n} + \frac{36i^2}{n^2} + 1 + \frac{6i}{n} \right)$$

$$= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{36}{n^2} i^2 + \frac{18}{n} i + 2 \right)$$

$$\cancel{\frac{b}{n} \sum_{i=1}^n} = \frac{b}{n} \left(\frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{18}{n} \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$\hookrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ $\hookrightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ $\hookrightarrow n$

$$= \frac{b}{n} \left(\frac{36}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{18}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right)$$

$$= \frac{b}{n} \left(\frac{6}{n} (n+1)(2n+1) + 9(n+1) + 2n \right)$$

$$= \frac{b}{n^2} \left(6(2n^2 + 3n + 1) + 9(n^2 + n) + 2n^2 \right)$$

$$= \frac{b}{n^2} \left(12n^2 + 18n + 6 + 9n^2 + 9n + 2n^2 \right)$$

$$= \frac{6}{n^2} (23n^2 + 27n + 6)$$

⑦

$$= 138 + \frac{27 \cdot 6}{n} + \frac{36}{n^2}$$

c) calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$.

Sol: observar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(138 + \cancel{\frac{27 \cdot 6}{n}}^0 + \cancel{\frac{36}{n^2}}^0 \right) = 138.$$

Por lo que se obtiene que

$$\int_1^7 (x^2 + x) dx = 138.$$