



Taller de ayudantía 10

Funciones Logaritmo y Exponencial y Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral

11/11/2022

En este taller, aplicaremos las propiedades de la función exponencial y logarítmica, las reglas de derivación, la regla de L'Hopital, los criterios de la primera y segunda derivada, el teorema fundamental del cálculo y el teorema del valor medio para modelar, analizar funciones cuya regla de correspondencia incluye a las funciones logaritmo y exponencial y resolver problemas de aplicación de la integral definida.

Objetivos:

- Modelar una función exponencial
- Calcular primeras y segundas derivadas aplicando las reglas de derivación
- Realizar análisis gráfico de funciones que incluyen en su regla de correspondencia a las funciones logaritmo y exponencial.
- Calcular primitivas
- Aplicar el cálculo diferencial y/o la integral definida para resolver problemas.
- Aplicar el teorema fundamental para resolver integrales definidas.
- Fundamentar usando el teorema del Valor Medio, la existencia del punto donde una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio y determinarlo.

Ejercicios Propuestos

1. Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura de un objeto T después de t minutos de haber sido dejado en un medio ambiente con temperatura constante T_a está dada por la función

$$T(t) = T_a - Me^{kt}$$

- a) Demuestre que en cualquier instante t la razón de cambio de la temperatura del objeto con respecto al tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del objeto.

- b) Una bebida, cuya temperatura es 3 grados Celsius, se saca de un refrigerador y se deja en una sala en donde la temperatura ambiente es constante igual a 30 grados Celsius. Si la temperatura de la bebida al cabo de 20 minutos es de 12 grados Celsius, determine el tiempo que se debe esperar desde que fue sacada del refrigerador para que su temperatura suba a 15 grados Celsius.
2. Considere las funciones $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = xe^{-x}$.
- a) Aplique el cálculo diferencial para obtener el gráfico de f y de g .
- b) A partir del ítem a) demuestre que $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$ y que $x < e^x$ para todo número real x .
- c) ¿Existe un número real x tal que $\ln(x) = e^x$?
3. La población $P(t)$ de un cierto cultivo de bacterias a las t horas se ha modelado por

$$P(t) = \frac{100 e^{0,1 t}}{1 + e^{0,1 t}}$$

Se requiere determinar el promedio de la población durante las 10 primeras horas del cultivo y el instante de tiempo en que la población es igual al promedio.