

PA1 calcular

$$a) \int 3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3} dx$$

$$= 3 \int x^{-3} dx + \int x^{5/2} dx - 2 \int x^{2/3} dx$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{7/2}}{7/2} - 2 \frac{x^{5/3}}{5/3} + C$$

$$= -\frac{3}{2} x^{-2} + \frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{6}{5} x^{5/3} + C.$$

$$b) \int z(9-z^2)^3 dz$$

~~$$= -\frac{1}{2} \int (9-z^2)^3 (-2z) dz$$~~

$$= -\frac{1}{2} \int (9-z^2)^3 (-2z) dz$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(9-z^2)^4}{4} = -\frac{1}{8} (9-z^2)^4 + C.$$

$$c) \int \frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{\sqrt{a}} dx \quad (a > 0 \text{ constante})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int ax^2 + a^3 \cos(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a \int x^2 dx + a^3 \int \cos(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \left(a - \frac{x^3}{3} + a^3 \cdot \sin(x) \right) + C$$

Recuerde:

$$\int g^r(x) \cdot g'(x) dx = \frac{g^{r+1}(x)}{r+1} + C$$

P2] sea $x(t)$ la posición (en metros) de una partícula con respecto al tiempo $t \geq 0$ (en segundos). Suponga que la aceleración $a(t) = x''(t)$ está dada por

$$a(t) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi t), \quad (t \geq 0)$$

a) si la velocidad inicial de la partícula es de $\frac{1}{4}$ m/s, encuentre la velocidad instantánea $v(t) = x'(t)$.

Sol: Sabemos que $v'(t) = x''(t) = a(t) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi t)$.

Por lo que $v(t)$ es una función $v: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cuya derivada es $\frac{\pi}{2} \sin(\pi t)$. Así, v es una primitiva de $a(t)$.

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) dt = \frac{1}{2} \int \sin(\pi t) \cdot \pi dt$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos(\pi t)) + C. \text{ Esto para algún } C \text{ que}$$

cumpla la condición inicial $v(0) = \frac{1}{4}$. Despejamos entonces C :

$$v(0) = -\frac{1}{2} \cos(0) + C = -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore v(t) = -\frac{1}{2} \cos(\pi t) + \frac{3}{4}.$$

b) si además la posición inicial de la partícula es de 5 cm , encuentre $x(t)$. (3)

Sol: Del mismo modo, lo que sabemos sobre la posición es

$$\text{que } x'(t) = v(t) = -\frac{1}{2} \cos(\pi t) + \frac{3}{4}.$$

$$\text{oo } x(t) = \int -\frac{1}{2} \cos(\pi t) + \frac{3}{4} dt = -\frac{1}{2} \int \cos(\pi t) dt + \frac{3}{4} \int 1 dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int \cos(\pi t) \cdot \pi dt + \frac{3}{4} t$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4} t + C.$$

Ahora, escogemos C de modo que $x(0) = 5$.

$$\Rightarrow x(0) = -\frac{1}{2\pi} \sin(0) + \frac{3}{4} \cdot 0 + C = C \stackrel{!}{=} 5. \Rightarrow C = 5.$$

Así, se obtiene la posición:

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4} t + 5.$$

P3] Encontrar F que satisfice

(4)

$$a) F'(x) = 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) \quad (x \geq 0) \\ y F(0) = \frac{2}{3}.$$

Sol: se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x) dx \\ &= \int 3x^{3/2} - (x+2)^{-2} + \cos(x) dx \\ &= 3 \int x^{3/2} dx - \int (x+2)^{-2} dx + \int \cos(x) dx \\ &= 3 \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + \sin(x) + C \\ &= \frac{6}{5} x^{5/2} + \frac{1}{x+2} + \sin(x) + C. \end{aligned}$$

$$\text{con } F(0) = \frac{6}{5} \cdot 0 + \frac{1}{2} + 0 + C = \frac{1}{2} + C = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore F(x) = \frac{6}{5} x^{5/2} + \frac{1}{x+2} + \sin(x) + \frac{1}{6}.$$

$$b) F'(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{con } F(0) = 1. \quad (5)$$

Sol:

$$F(x) = \int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}} dx = \int (2x^2+9)^{-1/2} \cdot 3x dx$$

$$= \frac{3}{4} \int (2x^2+9)^{-1/2} \cdot 4x dx = \frac{3}{4} \frac{(2x^2+9)^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{2x^2+9} + C.$$

Vemos que

$$F(0) = \frac{3}{2} \sqrt{9} + C = \frac{9}{2} + C \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}.$$

luego,

$$F(x) = \frac{3}{2} \sqrt{2x^2+9} - \frac{7}{2}.$$

Pr a)

			1
			2
			3
4	5	6	7

Para formar un cuadrado de lado 4 se deben agregar al anterior 7 cuadraditos.

⑥

estos equivalen a 2 veces el lado del cuadrado anterior + 1.

b) según lo visto anteriormente, en la etapa i (en la que se forma un cuadrado de lado i), se agregan 2 veces el lado del cuadrado formado en la etapa $i-1$ y uno adicional. De modo que si a_i denota la cantidad de cuadraditos agregados en la etapa i , entonces

$$a_i = 2(i-1) + 1 = 2i - 2 + 1 = 2i - 1.$$

c) si se suman los cuadrados agregados hasta la etapa m , se está sumando el área del cuadrado de lado m . El cual es m^2 . Es decir:

$$\sum_{i=1}^m a_i = m^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2.$$

utilizando propiedades de sumatorias, vemos que:

$$\sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^m i - \sum_{i=1}^m 1 = m^2 \quad (7)$$

↪ m

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=1}^m i - m = m^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^m i = \frac{m^2 + m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Por lo que la suma de los primeros m números naturales da $\frac{m(m+1)}{2}$.