Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Ayudantía 8
Sumas notables e integral de Riemann

28/10/2022

En este taller, calcularemos el término general de una sucesión definida recursivamente. Calcularemos la suma de n términos consecutivos de una sucesión y aplicaremos las propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables, como la suma telescópica, suma de números naturales, de cuadrados y cubos y la suma geométrica.
Posteriormente, calcularemos la suma superior de Riemann de una función cuadrática en un intervalo dado con el objetivo de determinar el valor de la respectiva integral definida mediante el límite de dicha suma superior.

Objetivos:

- Calcula el término general de una sucesión definida recursivamente
- Aplica propiedades del símbolo sumatoria y sumas notables para calcular la suma de los términos de una sucesión.
- Construye la suma superior de Riemann de una función monótona en un intervalo.
- Calcula la integral definida de una función cuadrática mediante el límite de su suma superior.

Ejercicios Propuestos

1. Sea a_n la sucesión definida recursivamente por:

$$a_1 = 2; \quad a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   a) Determine el término general de la sucesión.

   b) Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n$.

2. Utilice la notación Σ de sumatoria y sus propiedades para calcular una fórmula de las siguientes expresiones

   a) $1 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$.

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-2)^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2}$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{i^2+2i+1}\right)-\left(\frac{i-1}{i^2}\right).$

3. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=x^2+x$ y el intervalo $I=[1,7]$.

   a) Muestre que f es creciente en el intervalo I.

   b) Calcule la suma superior de Riemann, $S(f,P_n)$, en el intervalo I subdividiendo I en n-subintervalos I_i de igual longitud, Δx. Para ello, recuerde que si $I=[a,b]$ entonces

   $$\Delta x=\frac{b-a}{n};\quad I_i=[a+(i-1)\Delta x,a+i\Delta x],i=1,2,\ldots,n$$

   Además, si f es creciente en $[a,b]$ entonces

   $$S(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}f(a+i\Delta x)\cdot\Delta x$$

   c) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S(f,P_n)$ y proponga un resultado para $\displaystyle\int_1^7(x^2+x)dx$.

Ejercicios adicionales

1. En el Problema 3, calcule la suma inferior de Riemann $s(f,P_n)$ y muestre que

   $$\lim_{n\to+\infty}S(f,P_n)=\lim_{n\to+\infty}s(f,P_n).$$

2. Muestre que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)=x^2+x$ entonces

   $$\int_1^7(x^2+x)dx=F(7)-F(1).$$

El propósito del cálculo no son los números sino el entendimiento.