Ayudantía 5:

P1| Considere $f: \mathbb{R} - \{\pm 2\} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

i) Intersecciones con los ejes.

Con x|

$f(x) = 0 \iff x^2+1=0$. Esta ecuación no posee solución en $\mathbb{R}$. Por lo que f no intersecta el eje x.

Con y| $f(0) = \frac{0+1}{0-4} = -\frac{1}{4}$. Luego, f intersecta y en el punto $(0, -\frac{1}{4})$.

(ii) Asíntotas verticales y horizontales.

Para simplificar este análisis, notamos que

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+1}{x^2-4} = f(x). \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Por lo tanto, f es una función par.

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}{1-\cancel{\frac{4}{x^2}}_{\,\to 0}}$$

$= 1$. Luego, $y = 1$ es asíntota horizontal de f.

Debido a la paridad,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

Por lo que $y=1$ es la única asíntota horizontal de f.

<u>Asíntotas verticales</u>

Los candidatos son los valores de x tales que

$$x^2-4=0 \iff (x+2)(x-2)=0 \iff x=\pm 2.$$

Por lo que analizamos límites laterales en estos puntos.

<u>$x=2$</u>

- $$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{\overset{\to(+)}{x^2+1}}{\underbrace{(x+2)}_{(+)}\overset{\to 0^+}{(x-2)}} = +\infty.$$

- $$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{\overset{\to(+)}{x^2+1}}{\underbrace{(x+2)}_{(+)}\overset{\to 0^-}{(x-2)}} = -\infty.$$

Por lo que $x=2$ es asíntota vertical de f.

<u>$x=-2$</u> Por paridad, vemos que

- $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$ por lo que $x=-2$ es asíntota vertical de f.

- $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$

(iii) Intervalos de monotonía.

Para esto, analizamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{[x^2+1]'(x^2-4) - (x^2+1)[x^2-4]'}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-10x}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

hacemos tabla de signos:

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a ∞
$-10x$	+	+	−	−
$(x+2)^2$	+	+	+	+
$(x-2)^2$	+	+	+	+
f'	(+)	(+)	(−)	(−)
f	↗	↗	↘	↘

max

luego, vemos que f es creciente en $]-\infty,-2[$ y en $]-2,0]$ y decreciente en $[0,2[$ y en $]2,\infty[$.

iv) Máximos y mínimos locales de f.

De la tabla de monotonía, observamos que f posee un máximo local en $x=0$, en que alcanza el valor $f(0) = \frac{-1}{4}$, y no posee mínimos locales.

Este máximo no es global ya que f posee asíntotas verticales en que tiende a $+\infty$.

V) concavidad y puntos de inflexión.

Para esto analizamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \left[\frac{-10x}{(x^2-4)^2}\right]' = \frac{[-10x]'(x^2-4)^2 + 10x\,[(x^2-4)^2]'}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{-10(x^2-4)^{\cancel{2}} + 10x\cdot 2\cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-10(x^2-4)+40x^2}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{-10x^2+40+40x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{30x^2+40}{(x^2-4)^3} = \frac{\overset{(+)}{10(3x^2+4)}}{(x^2-4)^3}.$$

$\hookrightarrow (x+2)^3(x-2)^3$

hacemos tabla de signos:

	$]-\infty, -2[$	$]-2, 2[$	$]2, \infty[$
$10(3x^2+4)$	+	+	+
$(x+2)^3$	−	+	+
$(x-2)^3$	−	−	+
f''	(+)	(−)	(+)
f	∪	∩	∪

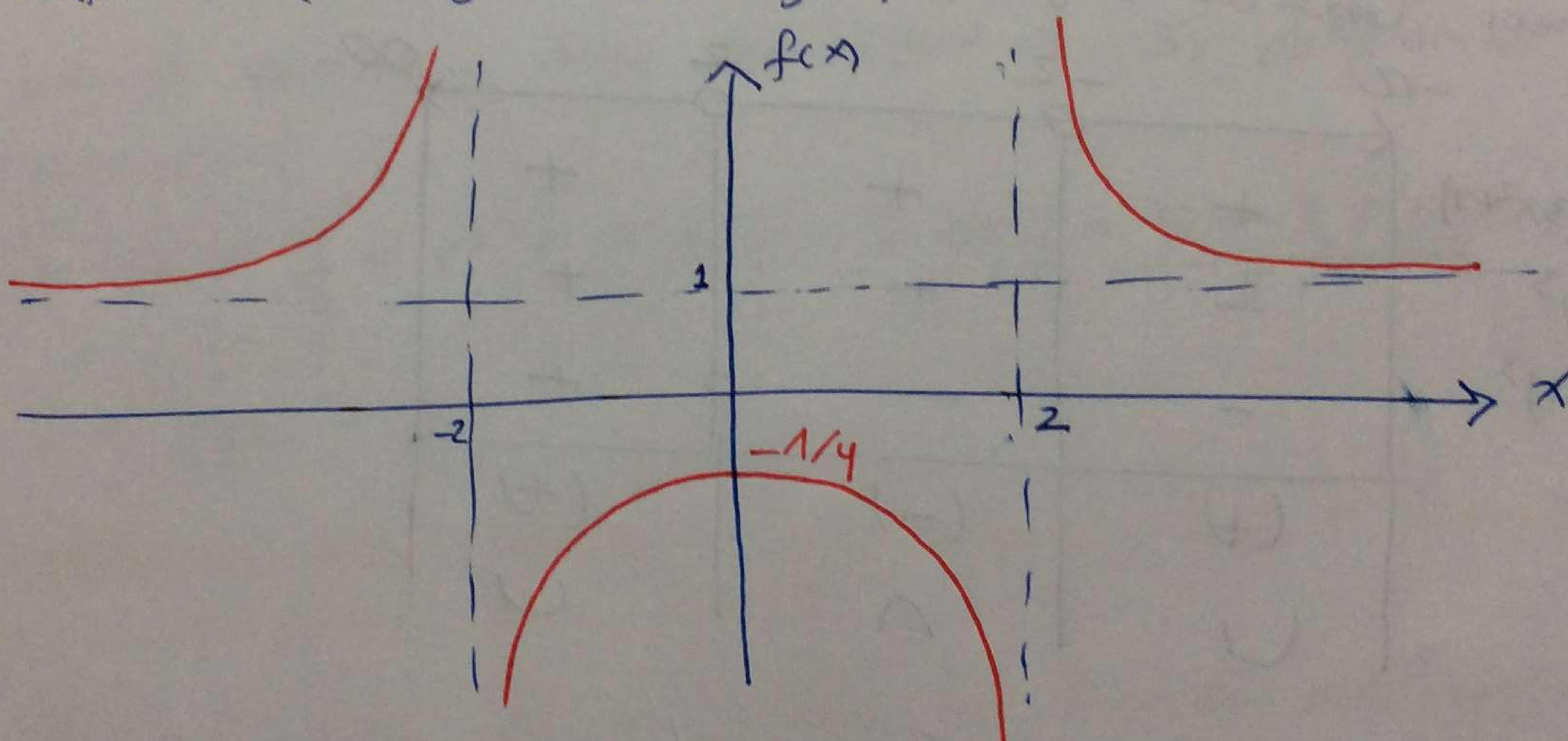
luego, vemos que f es cóncava hacia arriba en $]-\infty, -2[$ y en $]2, \infty[$. Y cóncava hacia abajo en $]-2, 2[$. como $f''(x) \neq 0$ siempre, f no posee puntos de inflexión.

gráfico

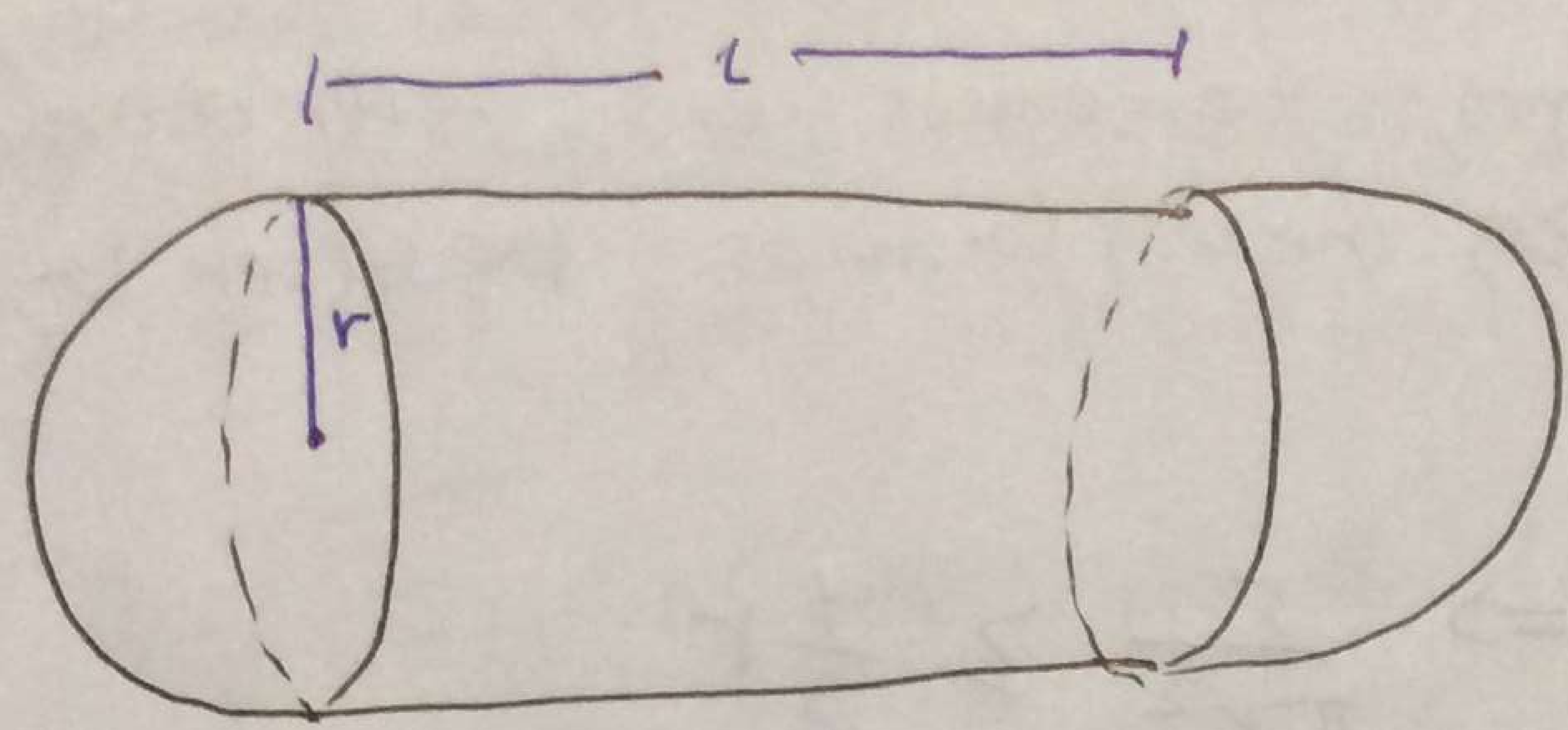
Resumimos la información obtenida en la siguiente tabla:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
f'	+	+	−	−
f''	+	−	−	+
f				

y teniendo en cuenta los datos anteriores, se obtiene el siguiente gráfico:



P2



Volumen: 5 [cm³]

→ se busca el área mínima.

a) Encontrar fórmula para el volumen:
ya que el volumen total se compone de una esfera y un cilindro:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 L$$

b) Expresar el largo del cilindro en función del radio.
ya que el volumen debe ser igual a 5, obtenemos la ecuación:

$$V = 5 \iff \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 L = 5 \iff L = \frac{5 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$$

$$\iff L = \frac{5}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r.$$

Nota: Establecer esta ecuación indica que L y r están siendo medidos en [cm].

c) Expresar el área de la cápsula en función del radio.
el área consiste de la superficie de una esfera y el manto de un cilindro. Luego,

reemplazo

$$A = 4\pi r^2 + 2\pi r \cdot L = 4\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{5}{\pi r^2} - \frac{4}{3}r\right)$$

$$= 4\pi r^2 + \frac{10}{r} - \frac{8\pi}{3}r^2 = \left(4\pi - \frac{8\pi}{3}\right)r^2 + \frac{10}{r}$$

$$= \frac{4\pi}{3}r^2 + \frac{10}{r}.$$

Para obtener el dominio, tenemos las restricciones $r, L \geq 0$. Y para $L \geq 0$, necesitamos resolver la inecuación:

$$\frac{5}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r \geq 0 \iff \frac{5}{\pi r^2} \geq \frac{4}{3} r$$

$(3\pi r^2 \geq 0)$

$$\iff 15 \geq 4\pi r^3 \iff \frac{15}{4\pi} \geq r^3$$

$$\iff r \leq \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}.$$

Así, obtenemos la función de área:

$$A : \left[0, \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A(r) = \frac{4\pi}{3} r^2 + \frac{10}{r}$$

d) Indicar r y L para que el área superficial sea mínima.

Para esto, estudiamos la derivada de $A(r)$.

$$A'(r) = \frac{8\pi}{3} r - \frac{10}{r^2} = \cancel{\frac{8\pi r^3}{3}} \; \frac{8\pi r^3 - 30}{3r^2}$$

~~Para lo que $A'(r) = 0$ cuando $8\pi r^3 = 30 \iff r = \sqrt[3]{\frac{15}{8\pi}}$~~

~~$\implies r^3 = \frac{15}{4\pi} \implies r = \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$~~

para estudiar los signos de $A'(r)$, nos basta con estudiar los signos del numerador. Así

$$A'(r) \geq 0 \iff 8\pi r^3 - 30 \geq 0 \iff r^3 \geq \frac{30}{8\pi} = \frac{15}{4\pi}$$

$\iff r \geq \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$. Es decir, en el dominio $\left[0, \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}\right]$ de la función $A(r)$, la derivada $A'(r)$ es siempre ≤ 0.

Así, se concluye que la función $A(r)$ es siempre decreciente. Y por lo tanto el mínimo de esta se alcanza en su extremo superior.

∴ ~~El radio es mínimo~~ La superficie es mínima cuando $r = \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$, y por lo tanto $L = 0$. (Una esfera)

P3) P: cantidad de nuevas células producidas.

X: cantidad de células.

$$P(x) = \frac{Ax}{B + x^m}, \quad x > 0 \quad (A, B > 0, m > 1).$$

a)

Notar que P tiene dominio $]0, \infty[$. Y como $m > 1$, $\lim_{x\to\infty} P(x) = 0$. Por lo que tiene sentido buscar su máximo.

Buscamos puntos críticos,

$$P'(x) = \frac{A(B + x^m) - Ax(mx^{m-1})}{(B + x^m)^2} = \frac{AB + Ax^m - Amx^m}{(B + x^m)^2}$$

$$= \frac{A(B + x^m(1 - m))}{(B + x^m)^2}$$

Notar que al ser $m > 1$, esta función es decreciente (solo el numerador)

Además,

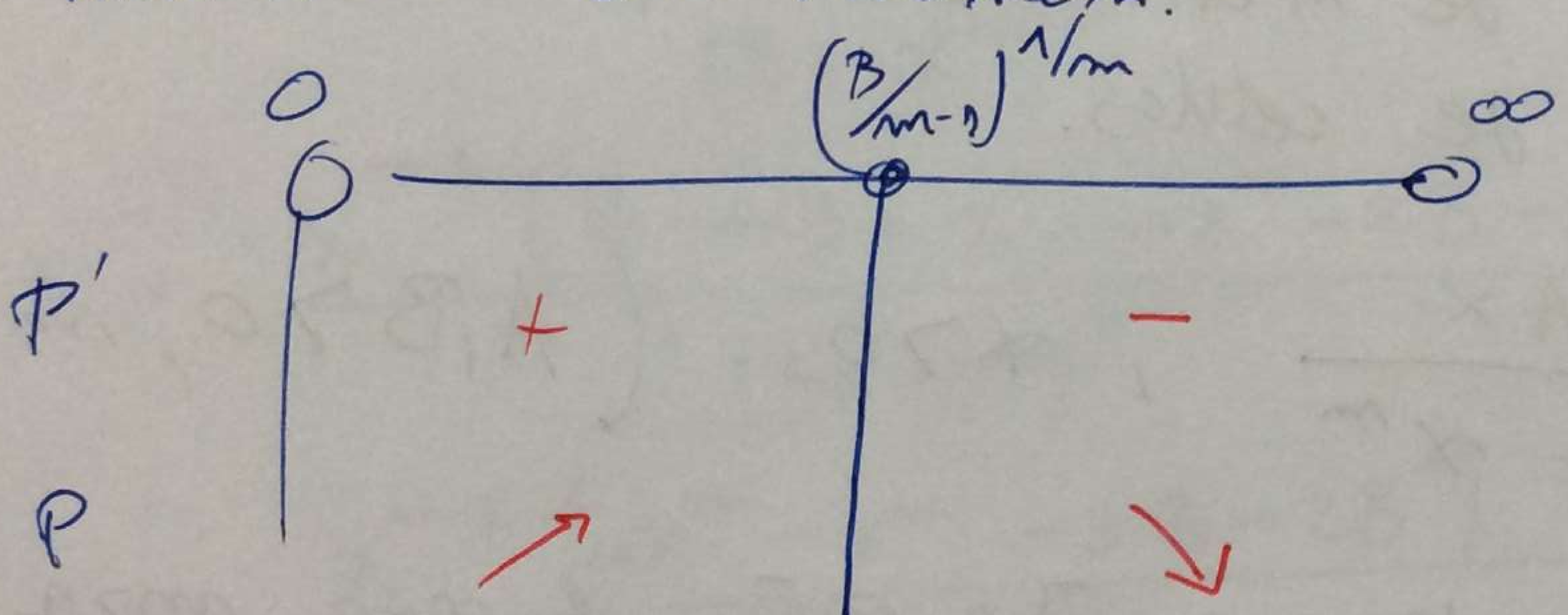
$P'(x) = 0 \iff A(B + x^m(1-m)) = 0$

$\iff B + x^m(1-m) = 0 \iff B = x^m(m-1)$

$\iff x^m = \dfrac{B}{m-1} \iff x = \sqrt[m]{\dfrac{B}{m-1}}$

(↳ porque $x > 0$)

Por lo tanto, este es el único punto crítico de la función. Ya que el denominador es positivo y el numerador es decreciente, sabemos que en este punto necesariamente pasa de ser (+) a ser (−). Así, como P pasa de ser creciente a ser decreciente, debe haber alcanzado un máximo. En resumen:



como es el único punto crítico, este máximo es global.

∴ La cantidad de células que maximiza la producción es $x = \left(\dfrac{B}{m-1}\right)^{1/m}$.

b) Minimizar $P'(x)$.

Del ítem anterior, tenemos que

$$P'(x) = A\,\frac{B + x^m(1-m)}{(B+x^m)^2}.$$

Para encontrar mínimos de esta función, analizamos su derivada.

$$P''(x) = A\,\frac{[B+x^m(1-m)]'(B+x^m)^2 - (B+x^m(1-m))\left[(B+x^m)^2\right]'}{(B+x^m)^4}$$

$$= A\,\frac{(1-m)(m x^{m-1})(B+x^m)^{\cancel{2}} - (B+x^m(1-m))\cdot 2\cancel{(B+x^m)}\cdot m x^{m-1}}{(B+x^m)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= A\,\frac{m x^{m-1}\left((1-m)(B+x^m) - 2(B+x^m(1-m))\right)}{(B+x^m)^3}.$$

$$= Am\,\frac{x^{m-1}(B - mB + x^m - mx^m - 2B - 2x^m + 2mx^m)}{(B+x^m)^3}$$

$$= Am\,\frac{x^{m-1}(mx^m - x^m - mB - 2B)}{(B+x^m)^3}$$

$$= Am\,\frac{x^{m-1}(x^m(m-1) - (mB+2B))}{(B+x^m)^3}$$

$$= Am\,\frac{x^{m-1}(x^m(m-1) - B(m+2))}{(B+x^m)^3}.$$

entonces

$$P''(x) = Am \, \frac{x^{m-2}\left(x^m(m-1) - B(m+2)\right)}{(B+x^m)^3}$$

por lo que para $x>0$, $P(x) = 0$ solo si

$$x^m(m-1) - B(m+2) = 0 \iff x^m = \frac{B(m+2)}{m-1}$$

$$\iff x = \left(\frac{B(m+2)}{m-1}\right)^{1/m}.$$

como $m>1$, $m-1>0$ y por lo tanto la función $x^m(m-1) - B(m+2)$ es creciente. Deducimos entonces que en $x = \left(\frac{B(m+2)}{m-1}\right)^{1/m}$ esta cambia de signo de $(-)$ a $(+)$. Y como todo el resto de los factores de $P''(x)$ son positivos para $x \in \,]0,\infty[$, deducimos que $P''(x)$ tiene el mismo cambio de signo.

	0		$\left(\frac{B(m+2)}{m-1}\right)^{1/m}$		∞
$P''(x)$		$(-)$		$(+)$	
$P'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

por lo que $P'(x)$ alcanza un mínimo global. Así que corresponde a la cantidad de células que minimiza la tasa de producción.