

Ayudantía 6

1

P1) E: energía por unidad de tiempo
V: velocidad medida en [km/h].

$$E(V) = \frac{1}{V} (K(V-35)^2 + C) \quad (K, C > 0)$$

Buscamos V que minimice E.

Sol: observar que

$$\begin{aligned} E(V) &= \frac{1}{V} (K(V^2 - 70V + 35^2) + C) \\ &= \frac{1}{V} (KV^2 - 70KV + 35^2K + C) \\ &= KV - 70K + \frac{35^2K + C}{V} = KV + \frac{35^2K + C}{V} - 70K. \end{aligned}$$

Analizamos la primera derivada:

$$E'(V) = K + (35^2K + C) \cdot \frac{-1}{V^2}$$

Por lo que $E'(V) = 0$ cuando

$$K = \frac{35^2K + C}{V^2} \Rightarrow V^2 = \frac{35^2K + C}{K} = 35^2 + \frac{C}{K}$$

¡Positivo!

$$\Rightarrow V = \sqrt{35^2 + \frac{C}{K}}$$

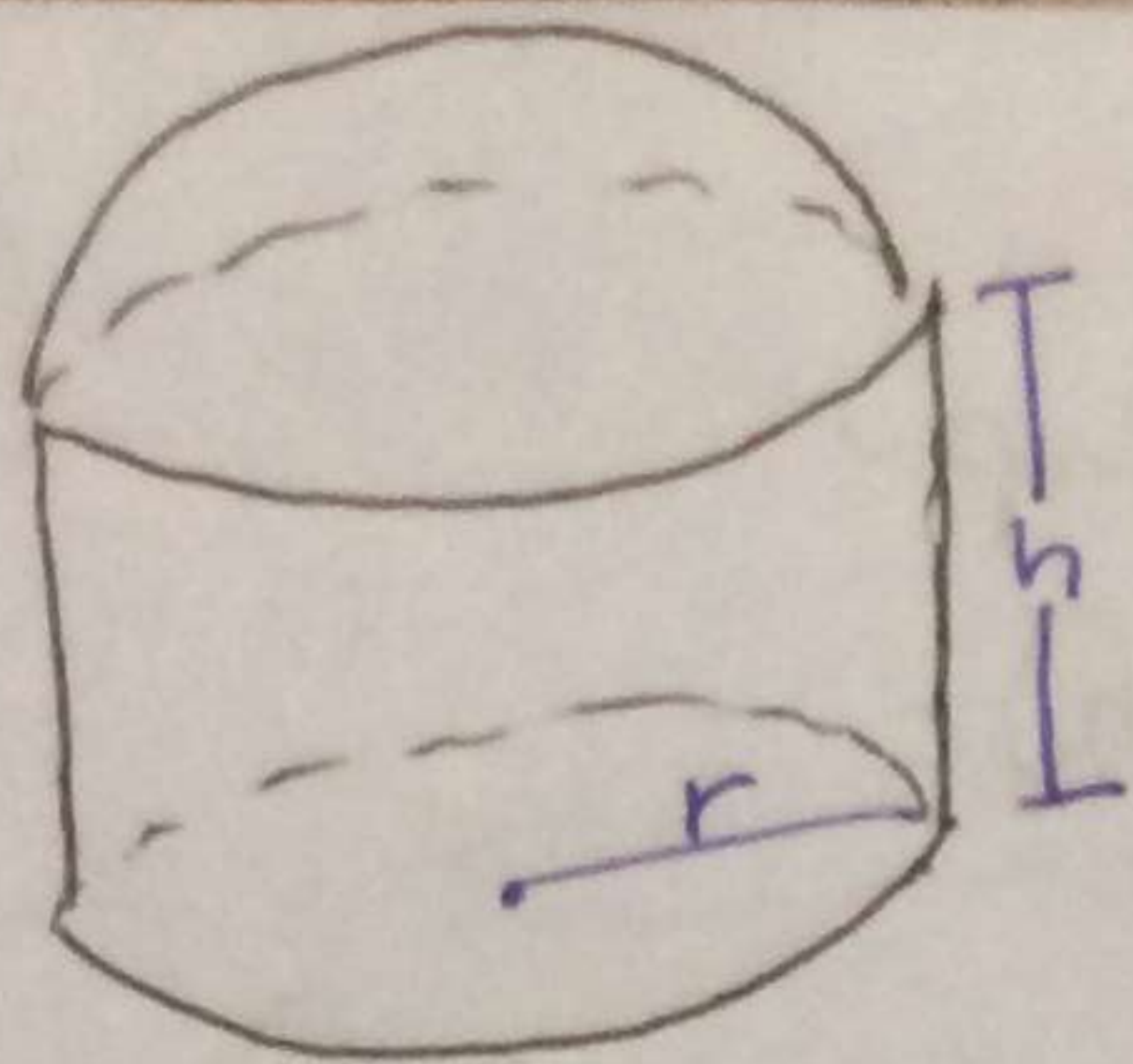
(ya que V es positivo, solo consideramos la solución positiva)

Para decidir si este punto crítico es máximo o mínimo, analizamos la segunda derivada:

$$E''(V) = -(35^2K + C) [V^{-2}]' = -(35^2K + C) \cdot (-2) \cdot V^{-3}$$

$= \frac{2(35^2K + C)}{V^3} > 0$. Por lo que E(V) es cóncava y el punto encontrado es mínimo.

P₂



$$V = \frac{4400\pi}{3}$$

(2)

Determinar r, h para que la superficie sea mínima.

Sol: El volumen viene dado por el de un cilindro y la mitad del de una esfera. De este modo:

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$$

Ya que $V = \frac{4400\pi}{3}$, podemos despejar h en

función de r como sigue:

$$V = \frac{4400\pi}{3} \Leftrightarrow \cancel{\pi} r^2 h + \frac{2}{3} \cancel{\pi} r^3 = \frac{4400\cancel{\pi}}{3}$$

$$\Rightarrow r^2 h = \frac{4400 - 2r^3}{3} \Rightarrow h = \frac{4400 - 2r^3}{3r^2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{4400}{3r^2} - \frac{2}{3} r. \text{ Ahora, expresamos la superficie:}$$

Esta consiste en la superficie del manto de un cilindro y la mitad de la de una esfera:

$$S = h \cdot (2\pi r) + \frac{1}{2} (4\pi r^2) = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Reemplazamos h para obtener una función de superficie.

$$S(r) = 2\pi r \left(\frac{4400 - 2r^3}{3r^2} \right) + 2\pi r^2$$

(3)

$$= 2\pi \left(\frac{4400 - 2r^3}{3r} \right) + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi \left(\frac{4400}{3r} - \frac{2}{3}r^2 + r^2 \right) = 2\pi \left(\frac{4400}{3r} + \frac{1}{3}r^2 \right)$$

Esto tiene la restricción de que $h \geq 0$. Así,

$$h = \frac{4400}{3r^2} - \frac{2}{3}r \geq 0 \Rightarrow \frac{4400}{3r^2} \geq \frac{2}{3}r$$

$$\Leftrightarrow 2200 \geq r^3 \Rightarrow r \leq \sqrt[3]{2200}$$

Por lo tanto debemos minimizar la función

$$S: [0, \sqrt[3]{2200}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S(r) = 2\pi \left(\frac{4400}{3r} + \frac{1}{3}r^2 \right)$$

Analizamos la primera derivada:

$$S'(r) = 2\pi \left(\frac{4400}{3} \cdot \frac{-1}{r^2} + \frac{2}{3}r \right)$$

Por lo que $S'(r) = 0$ cuando

$$\frac{2}{3}r = \frac{4400}{3r^2} \Leftrightarrow r^3 = 2200 \Rightarrow r = \sqrt[3]{2200}$$

observar que este punto está en el borde del dominio. Por lo que analizamos los signos de la primera derivada.

$$S'(r) = 2\pi \left(\frac{2}{3}r - \frac{4400}{3r^2} \right)$$

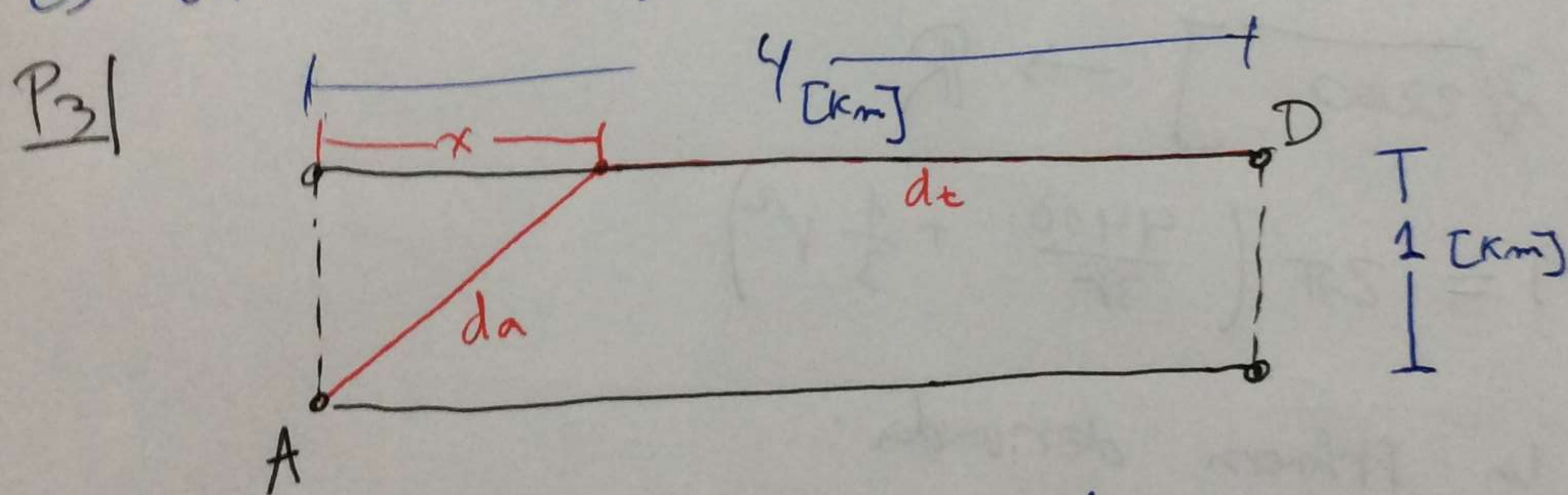
$$= 2\pi \left(\frac{2r^3 - 4400}{3r^2} \right) = \left(\frac{4\pi}{3r^2} \right) (r^3 - 2200)$$

esto es negativo en el dominio $[0, \sqrt[3]{2200}]$.

Por lo tanto, $S'(r) \leq 0$ Para todo r en el dominio.

Así, $S(r)$ es una función decreciente y por lo tanto el mínimo global se obtiene cuando $r = \sqrt[3]{2200}$.

Esto implica que $h=0$ y por lo tanto la solución es una semiesfera.



Velocidad de nado: $4 \text{ [km/h]} = V_a$

Velocidad en tierra: $10 \text{ [km/h]} = V_t$

a) expresar el tiempo en función de x .

Sol: Para un x dado, la distancia recorrida en agua es

$d_a = \sqrt{1+x^2}$ y por lo tanto el tiempo transcurrido en agua

es $T_a = \frac{d_a}{V_a} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{4}$.

Por otro lado, la distancia en tierra es

(5)

$d_t = 4 - x$. De modo que el tiempo en tierra es

$$T_t = \frac{d_t}{v_t} = \frac{4-x}{10}.$$

Así, el tiempo ~~total~~ total es

$$T(x) = T_a + T_t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} + \frac{4-x}{10} \quad (x \in [0, 4].)$$

b) Puntos críticos.

ordenemos un poco:

$$T(x) = \frac{1}{4} \sqrt{1+x^2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}x.$$

Analizaremos la primera derivada:

$$T'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x - \frac{1}{10}$$

Por lo que $T'(x) = 0$ cuando,

$$\frac{\cancel{x}}{4\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{10} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{5}.$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 5x = 2\sqrt{1+x^2} \quad (\Leftrightarrow) \quad 25x^2 = 4(1+x^2)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 21x^2 = 4 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 = \frac{4}{21}. \quad \text{Como } x \geq 0,$$

$$\text{se obtiene } x = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

c) Analizar monotonia de T.

(6)

Sol:

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{10} = \frac{5x}{20\sqrt{1+x^2}} - \frac{2\sqrt{1+x^2}}{20\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow T'(x) = \frac{5x - 2\sqrt{1+x^2}}{20\sqrt{1+x^2}}$$

observar que $T'(x) \geq 0$ cuando $5x - 2\sqrt{1+x^2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 5x \geq 2\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 25x^2 \geq 4(1+x^2)$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 \geq 4 + 4x^2 \Leftrightarrow 21x^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{4}{21} \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{\frac{4}{21}}$$

y como x positivo, se obtiene que $T'(x) \geq 0$ cuando $x \in [\sqrt{\frac{4}{21}}, 4]$.

Así, T es decreciente en $[0, \sqrt{\frac{4}{21}}]$ y creciente en $[\sqrt{\frac{4}{21}}, 4]$.

d) con la info.

obtenida anteriormente,

se concluye que el

tiempo de viaje es mínimo cuando se nada hasta un punto $\frac{2}{\sqrt{21}}$ [km] río abajo.

