

Ayudantía 4:

①

P2 | $f: [-\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$.

a) Encontrar puntos en la gráfica de f tal que la tangente sea horizontal.

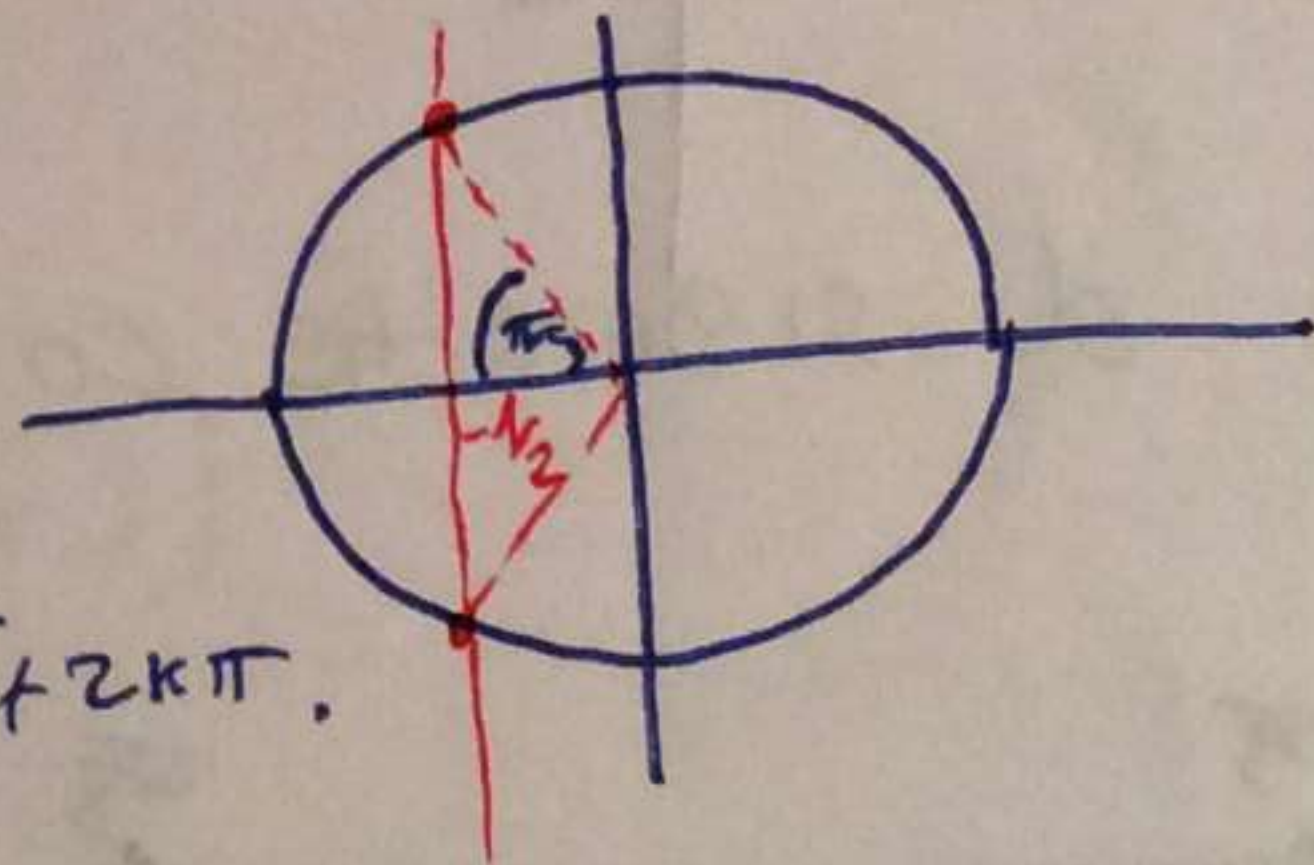
Sol: para analizar la tangente, obtendremos la derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\sin(x)]'(2 + \cos(x)) - \sin(x)[2 + \cos(x)]'}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x) + \cancel{\cos^2(x)} + \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}. \end{aligned}$$

sabemos que la recta tangente es horizontal cuando $f'(x) = 0$. (vego, busquemos $x \in [-\pi, 2\pi]$ tal que

$$\frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}.$$



$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$x_2 = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$, esto corresponde a los valores

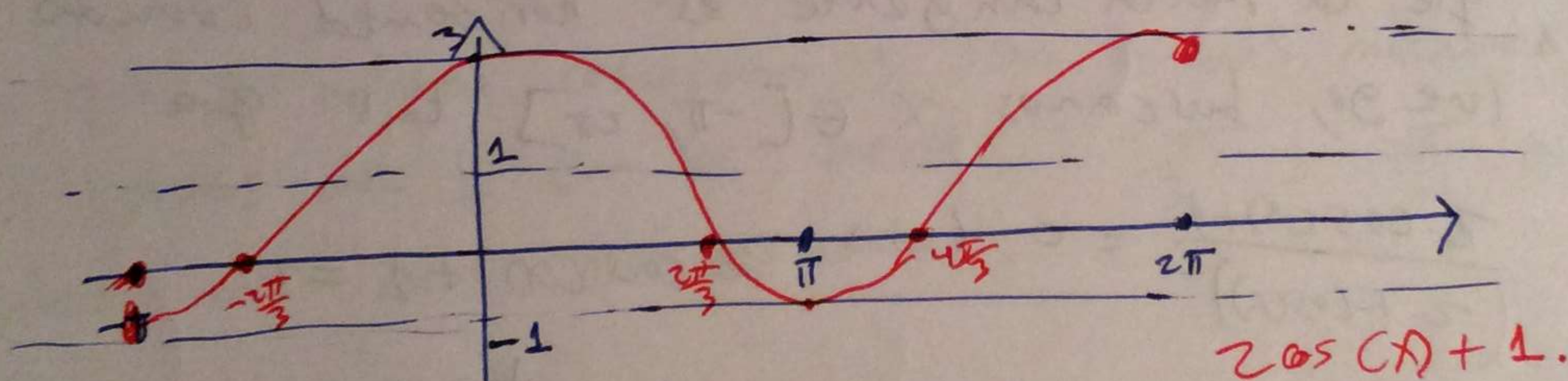
$$x = -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$$

b) concluir máximos y mínimos locales / globales. (2)

Primeramente tenemos que $f(-\pi) = \frac{\cancel{\sin(-\pi)}^0}{2 + \cos(-\pi)} = 0$

y $f(2\pi) = \frac{\cancel{\sin(2\pi)}^0}{2 + \cos(2\pi)} = 0$.

Adicionalmente, nuestros candidatos a máximos/mínimos locales son los puntos en que $f'(x) = 0$. Los cuales ya obtuvimos. Para determinar a qué corresponden estos puntos, debemos analizar los signos de f' . Pero ya que el denominador es siempre positivo, los signos de f' vienen dados por los signos de $2\cos(x) + 1$, según se puede ver en el gráfico de la función:



se observa el siguiente comportamiento:

	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$2\cos(x) + 1$	(-)	(+)	(-)	(+)	
f'	(-)	(+)	(-)	(+)	
f	↘	↗	↘	↗	
		mim	max	mim	

Entonces $x = -\frac{2\pi}{3}$ y $x = \frac{\pi}{3}$ son mínimos locales

y $x = \frac{2\pi}{3}$ es máximo local.

(3)

observamos que

$$\bullet f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\overset{\text{red } \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}{\underset{\text{red } \frac{1}{2}}{2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Al ser esto mayor al valor de f en los bordes, $\frac{2\pi}{3}$ es máximo global.

$$\bullet f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\overset{\text{red } -\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}}{\underset{\text{red } \frac{1}{2}}{2 + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\bullet f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{2 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ya que sus valores coinciden y son ambos menores que los valores de f en los bordes, $-\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ son ambos mínimos globales de f .

P2 V : velocidad medida en km/h

t : tiempo en horas ($t \in [2, 6]$)

$$V(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8$$

a) determine intervalos en que V aumenta/disminuye.

sol: Para ver los intervalos de monotonicidad de $v(t)$, analizamos los signos de $v'(t)$

(4)

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72 = 3(t^2 - 10t + 24)$$

$$= 3(t-6)(t-4).$$

	2	4	6
$t-6$	(-)	(-)	
$t-4$	(-)	0	(+)
v'	(+)		(-)
v	↗		↘

(max)

entonces, v aumenta ~~entre~~ entre las 2pm y las 4pm y luego disminuye hasta las 6pm.

b) Determine velocidades máxima y mínima y a qué hora se dan.

sol: de la tabla anterior, se observa que la velocidad máxima es $v(4) = 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 8$

$$= 64 - 240 + 288 + 8 = 64 + 48 + 8 = 120 \text{ [km/h]}.$$

Adicionalmente, tenemos que

~~Por lo~~ $v(2) = 100$ y $v(6) = 116$. Por lo que la velocidad mínima se dio a las 2pm.
de 100 [km/h].

P3]

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (A, \omega, \phi \in \mathbb{R})$$

(5)

demostrar que

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Sol.

tenemos que

$$x'(t) = A \cos(\omega t + \phi) \cdot \omega$$

$$x''(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi) \cdot \omega = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Entonces

$$x''(t) + \omega^2 x(t)$$

$$= -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi) + \omega^2 \cdot A \sin(\omega t + \phi) = 0 \quad \square$$

P4] considere $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x}$.

Determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión de f .

Sol. Para esto, analizaremos los signos de f'' .

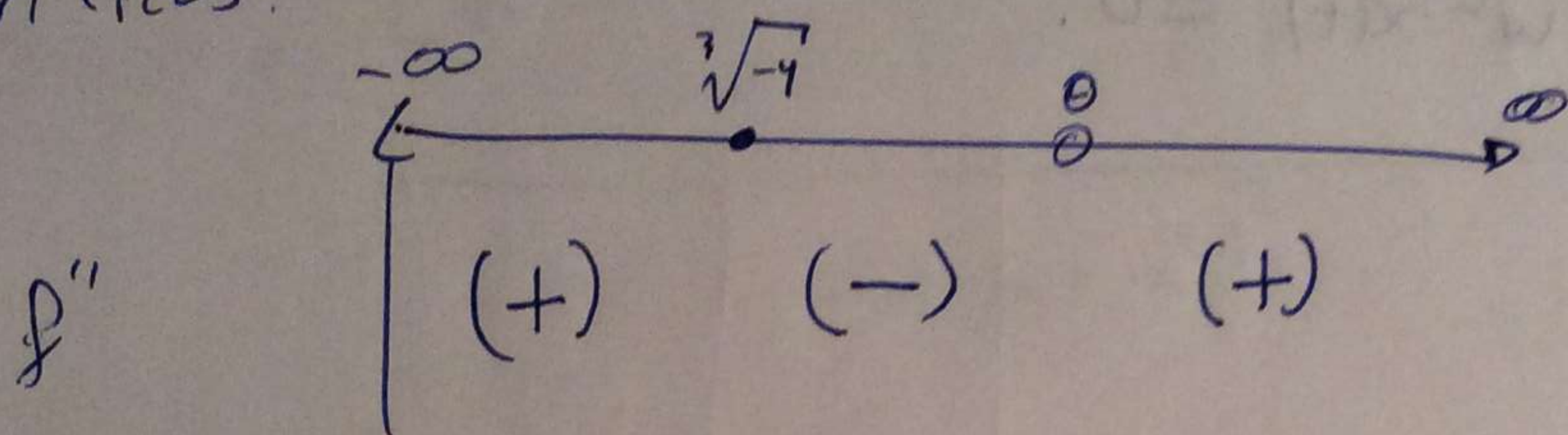
$$f'(x) = 2 \frac{x}{2} - \frac{2}{x^2} = x - \frac{2}{x^2}.$$

$$f''(x) = 1 - [2x^{-2}]' = 1 - 2 \cdot (-2)x^{-3} = 1 + \frac{4}{x^3}$$

observamos que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^3} = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4} \quad (6)$$

Por lo tanto, podemos hacer la sgte tabla de puntos críticos:



Por lo tanto, la función f es cóncava en $]-\infty, \sqrt[3]{-4}]$ y en $]0, \infty[$ y cóncava en $[\sqrt[3]{-4}, 0[$.

Al ser un punto en que la concavidad cambia, $x = \sqrt[3]{-4}$ es entonces un punto de inflexión de f .