

P1 | Ayudantía 3

①

$$a) g(x) = \frac{(x^2+x)^3 \sqrt{\sin(x)}}{1+x+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{[(x^2+x)^3 \sqrt{\sin(x)}]' (1+x+x^2) - (x^2+x)^3 \sqrt{\sin(x)} \cdot [1+x+x^2]'}{(1+x+x^2)^2}$$

em que

$$\bullet [1+x+x^2]' = 1+2x$$

$$\bullet [(x^2+x)^3 \sqrt{\sin(x)}]' = (2x+1)^3 \sqrt{\sin(x)} + (x^2+x) \cdot \frac{1}{3} \sin(x)^{-2/3} \cdot \cos(x)$$

A sr,

$$g'(x) = \frac{[(2x+1)^3 \sqrt{\sin(x)} + (x^2+x) \cdot \frac{1}{3} \sin(x)^{-2/3} \cdot \cos(x)] \cdot (1+x+x^2) - (x^2+x)^3 \sqrt{\sin(x)} \cdot (1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$b) I(x) = \arcsin(\cos(x))$$

Recuerde: $[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Así, por regla de la cadena:

(2)

$$[\arcsen(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \cdot (-\sen(x))$$

$\underbrace{\sqrt{1-\cos^2(x)}}_{\sen^2(x)}$

$$= \frac{1}{\sen(x)} \cdot (-\sen(x)) = -1.$$

P2] calcule los sgtes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 1}{7x^3 - x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} (3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{\cancel{x^3} (7 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3})}$$

0 / 0

$$= \frac{3}{7}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{1+x^2} - x) \cdot \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)}{(\sqrt{1+x^2} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x (1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2})}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{x^2(\frac{1}{x^2} + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} (\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

0

Se puede concluir de a) y b) que las funciones ③

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 1}{7x^3 - x^2 + 5} \quad \text{y} \quad g(x) = x(\sqrt{1+x^2} - x)$$

tienen asíntotas horizontales $y = \frac{3}{7}$ e $y = \frac{1}{2}$ respectivamente.

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{1 - \sin(x) + x \cdot \cos(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + 1 - \sin(x) + x \cdot \cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x \sin(x)} = 0.$$

Entonces por regla de L'Hôpital, el límite original existe y es igual a 0.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$ / cambio de variable $u = x^2$. $x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0^+$.

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin(u)}{2u} = \frac{1}{2}.$$

Por lo que el límite anterior existe y es $\frac{1}{2}$.

se puede concluir de c) y d) que las funciones (4)

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \quad y \quad g(x) = \frac{1 - \cos(x^4)}{x^4}$$

NO tienen asíntotas verticales en $x=0$.

P3 | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x^2+1}$. Analizar asíntotas horizontales para f y f' .

Solución: Primero, notamos que $f(-x) = \frac{4(-x)^2-1}{2(-x)^2+1}$

$$= \frac{4x^2-1}{2x^2+1} = f(x). \text{ Por lo que } f \text{ es par.}$$

Ahora,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-1}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2}(4 - \cancel{1/x^2})}{\cancel{x^2}(2 + \cancel{1/x^2})} = 2.$$

por lo que f tiene asíntota horizontal $y=2$

ya que f es par, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Por lo que no hay más asíntotas horizontales.

$$\text{Por otro lado, } f'(x) = \frac{[4x^2-1]'(2x^2+1) - (4x^2-1)[2x^2+1]'}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{8x(2x^2+1) - (4x^2-1)4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{4x(2(2x^2+1) - 4x^2 + 1)}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x(\cancel{4x^2} + 2 - \cancel{4x^2} + 1)}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{12x}{(2x^2 + 1)^2}.$$

⑤

y terminando esto, vemos que

$$f'(-x) = \frac{12(-x)}{(2(-x)^2 + 1)^2} = -\frac{12x}{(2x^2 + 1)^2} = -f'(x).$$

por lo que f' es impar.

Ahora,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{(2x^2 + 1)^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{2(2x^2 + 1) \cdot 4x} = 0.$$

Por lo que por Regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

Al ser f' impar,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -f'(x)$$

$$= -\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = -0 = 0. \text{ Así que } f' \text{ tiene}$$

la única asíntota horizontal $y = 0$.