

Ayudantía 1:

①

P1] $f:]-2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{x^3 + x^2 - 2x}, & -2 < x < 0 \\ \sqrt{2} & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, & 0 < x < 1 \\ x+1 & x \geq 1. \end{cases}$$

Primero, notamos que, para $x \in]-2, 0[$,

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x^2 + x - 2)} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$\stackrel{x \neq -1}{=} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

y para $x \in]0, 1[$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Por lo que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2}, & x \in]-2, 0[\\ \sqrt{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}, & x \in]0, 1[\\ x+1, & x \in [1, \infty[\end{cases}$$

a) Probar f continua en $x=0$.

(2)

Para esto, se debe tener que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$
por lo que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ debene existir y
valor $\frac{1}{2}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

Así, por límites laterales, se concluye que f es continua
en $x=0$.

b) ¿es f continua en $x=1$?

Para esto, se debe cumplir $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\text{y } f(1) = 1+1 = 2.$$

$$\rightarrow \text{es claro que } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2.$$

$$\rightarrow \text{pero } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \neq 2.$$

por lo que en realidad $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe!

Así que f no tiene posibilidad de ser continua
en $x=1$.

c) Intervalos donde f es continua

→ vimos ya que los polinomios (y en particular las rectas!) son continuos en todo $\mathbb{R}$. luego,

f es continua en $]1, \infty[$ //

→ También el cociente $\frac{x+1}{x+2}$ entre dos funciones continuas será continua siempre que $x+2 \neq 0$
($\Rightarrow x \neq -2$). Así, se concluye que f continua en $x \in]-2, 0[$ //

→ por la misma propiedad del cociente, ya que ya vimos que $\sqrt{x}$ es una función continua,

$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ es continua siempre que $x > -1$ (ya que las raíces son positivas y por lo tanto el denominador nunca se anula). Así, f es en particular continua en $]0, 1[$.
Así y con lo visto en a) y b), f es continua en

$] -2, \infty[\setminus \{1\}$.

P2] p: porcentaje de oxígeno

$t \geq 0$: tiempo medido en días.

$$P(t) = 100 \frac{t^3 + 100t + 1000}{t^3 + 200t + 1000}$$

veros que como $P(t)$ consiste de un cociente de dos polinomios, será entonces una función continua siempre que $t^3 + 200t + 1000 \neq 0$. Cosa que claramente se cumple para $t \geq 0$. luego, $P(t)$ es continua en particular en $[0, 10]$. veros además que

$$P(0) = 100 \frac{1000}{1000} = 100.$$

$$P(10) = 100 \frac{10^3 + 100 \cdot 10 + 1000}{10^3 + 200 \cdot 10 + 1000} = 100 \frac{3000}{4000}$$

$$= 100 \cdot \frac{3}{4} = 75.$$

luego, por el T.VI, se tiene que para todo $y \in [75, 100]$, existe un $t^* \in [0, 10]$ tal que $P(t^*) = y$.

En particular, para $y = 87$, existe entonces un instante t^* en que $P(t^*) = 87$. Que es lo pedido.

P3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x + 2.$

(5)

Encontrar la recta tangente a f en $(0, f(0)).$

$$\rightarrow f(0) = 2.$$

$$\rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3 \text{ ~~en~~ y por lo tanto,$$

$$f'(0) = 3.$$

Entonces, tangente a f en $x=0$ existe una recta que tiene

- Pendiente 3
- Valor y en $x=0$.

Esta recta es entonces

$$y = 2 + 3x //$$

P4 f, g diferenciables en $\mathbb{R}$ tales:

$$f(2) = 1, \quad f'(2) = 4, \quad g(2) = -5, \quad g'(2) = 1.$$

Definimos, $F(x) = \frac{f(x) - g(x)}{4 + f(x) \cdot g(x)}$ calcular $F'(2).$

Sol: utilizando reglas de derivación:

$$F'(x) = \frac{[f(x) - g(x)]' (4 + f(x) \cdot g(x)) - (f(x) - g(x)) [4 + f(x) \cdot g(x)]'}{(4 + f(x) \cdot g(x))^2} \quad (6)$$

$$= \frac{(f'(x) - g'(x)) (4 + f(x) \cdot g(x)) - (f(x) - g(x)) (f'(x) g(x) + f(x) g'(x))}{(4 + f(x) \cdot g(x))^2}$$

Por lo tanto:

$$F'(2) = \frac{(f'(2) - g'(2)) (4 + f(2) \cdot g(2)) - (f(2) - g(2)) (f'(2) g(2) + f(2) g'(2))}{(4 + f(2) \cdot g(2))^2}$$

$$= \frac{3 \cdot (4 + 1 \cdot (-5)) - (1 + 5) (-20 + 1)}{(4 + -5)^2} = \frac{3 \cdot (-1) - 6 \cdot (-19)}{1}$$

$$= -3 + 114 = 111 //$$