Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do.* semestre de 2022

Taller de ayudantía 10
Funciones Logaritmo y Exponencial y Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral

11/11/2022

En este taller, aplicaremos las propiedades de la función exponencial y logarítmica, las reglas de derivación, la regla de L'Hopital, los criterios de la primera y segunda derivada, el teorema fundamental del cálculo y el teorema del valor medio para modelar, analizar funciones cuya regla de correspondencia incluye a las funciones logaritmo y exponencial y resolver problemas de aplicación de la integral definida.

Objetivos:

- Modelar una función exponencial
- Calcular primeras y segundas derivadas aplicando las reglas de derivación
- Realizar análisis gráfico de funciones que incluyen en su regla de correspondencia a las funciones logaritmo y exponencial.
- Calcular primitivas
- Aplicar el cálculo diferencial y/o la integral definida para resolver problemas.
- Aplicar el teorema fundamental para resolver integrales definidas.
- Fundamentar usando el teorema del Valor Medio, la existencia del punto donde una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio y determinarlo.

Ejercicios Propuestos

1. Según la ley de enfríamiento de Newton, la temperatura de un objeto T después de t minutos de haber sido dejado en un medio ambiente con temperatura constante T_a está dada por la función

$$T(t) = T_a - Me^{kt}$$

a) Demuestre que en cualquier instante t la razón de cambio de la temperatura del objeto con respecto al tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del objeto.

Solución: En primer lugar, para un instante t la razón de cambio de la temperatura del objeto está dado por

$$T'(t) = -Me^{kt} \cdot (k) = kMe^{kt} .$$

Luego, dado que

$$T_a - T(t) = T_a - (T_a - Me^{kt}) = Me^{kt}$$

Podemos notar que para $k \neq 0$, se tiene

$$\frac{T'(t)}{T_a - T(t)} = k,$$

Es decir, para cualquier instante t la razón de cambio de la temperatura del objeto con respecto al tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del objeto.

b) Una bebida, cuya temperatura es 3 grados Celsius, se saca de un refrigerador y se deja en una sala en donde la temperatura ambiente es constante igual a 30 grados Celsius. Si la temperatura de la bebida al cabo de 20 minutos es de 12 grados Celsius, determine el tiempo que se debe esperar desde que fue sacada del refrigerador para que su temperatura suba a 15 grados Celsius.

Solución: Atendiendo el problema con el modelo exponencial y en virtud de la información presentada en el enunciado, se tiene que la temperatura de la bebida a los t minutos de estar fuera del refrigerador es

$$T(t) = 30 - Me^{kt}$$

donde M y k son constantes a determinar. Además, dado que $T(0) = 3°[\mathrm{C}]$ se tiene

$$T(0) = 30 - Me^{k \cdot 0} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad M = 27 .$$

Además, como $T(20) = 12°[\mathrm{C}]$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(20) = 30 - 27e^{20k} = 12 \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{2}{3} = e^{20k} \\ &\Longrightarrow \qquad k = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{2}{3}\right) . \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada instante $t > 0$,

$$T(t) = 30 - 27e^{\frac{1}{20}\ln\left(\frac{2}{3}\right)t} .$$

Ahora, sea τ el instante en el cual la bebida llega a los $15°[\mathrm{C}]$, vale decir

$$\begin{aligned}
T(\tau) = 15 \quad &\iff \quad 30 - 27e^{\frac{1}{20}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\tau} = 15 \\
&\iff \quad e^{-\frac{1}{20}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\tau} = \frac{15}{27} \\
&\iff \quad \frac{1}{20}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\tau = \ln\left(\frac{5}{9}\right) \\
&\iff \quad \tau = \frac{20(\ln(5) - \ln(9))}{\ln(2) - \ln(3)} \approx 28{,}99\,[\mathrm{min}]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, aproximadamente en la primera media hora ya alcanzará los $15°[\mathrm{C}]$.

2. Considere las funciones $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = xe^{-x}$.

   a) Aplique el cálculo diferencial para obtener el gráfico de f y de g.

   Solución:

   - Para $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, notemos que la función f es diferenciable para $x > 0$ pues la función logaritmo natural lo es, además,

     $$\begin{aligned}
     f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x) + \frac{1}{x^2} \\
     &= \frac{1}{x^2}\big(1 - \ln(x)\big).
     \end{aligned}$$

     Cuyo dominio coincide con el dominio de f, $]0, \infty[$. Luego, estudiamos el signo de la expresión, para esto consideramos la igualdad

     $$\begin{aligned}
     1 - \ln(x) = 0 \quad &\iff \quad \ln(x) = 1 \\
     &\iff \quad x = e
     \end{aligned}$$

     Ahora, como $f'(x)$ es continua en el intervalo $]0, \infty[$ ya que la función logaritmo lo es, además, $f'(e) = 0$ entonces, por teorema de Bolzano, f' tiene un único signo en el intervalo $]0, e[$ y un único signo en el intervalo $]e, \infty[$. Notemos que

     $$f'(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad f'(e^2) = -\frac{1}{e^4} < 0$$

de manera que

	$x \in]0,e[$	$x = e$	$x \in]e,\infty[$
x^2	$+$	$+$	$+$
$-(\ln(x)-1)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Por lo tanto, f es decreciente para $x \in\ [e,\infty[$ y f es creciente para $x \in]0,e[$.

Además, f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, en efecto, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

Donde, tanto $\varphi_1(x) = \ln(x)$ como $\varphi_2(x) = x$ son funciones diferenciables y

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_1(x) = \lim_{x\to\infty} \varphi_2(x) = \infty.$$

Por lo cual,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Luego, por teorema de L'hôpital se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Es decir, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Ahora, podemos notar que la función f' es diferenciable en su dominio y

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}(1-\ln(x)) + \frac{1}{x^2} \cdot -\frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}.$$

Con lo cual, por una lado podemos deducir que los puntos de inflexión de f son lo $x > 0$ tales que

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \frac{2\ln(x)-3}{x^3} \\ &\Longleftrightarrow \qquad 2\ln(x)-3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad \ln(x) = \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \qquad x = e^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

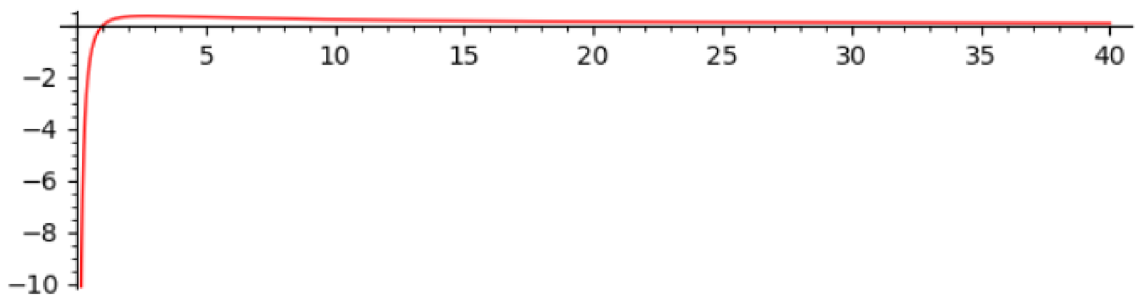
Por otro lado, analizando los signos de f'', se tiene

	$x \in]0, e^{\frac{3}{2}}[$	$x = e^{\frac{3}{2}}$	$x \in]e^{\frac{3}{2}}, \infty[$
x^3	$+$	$+$	$+$
$2\ln(x) - 3$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en los $x \in]e^{\frac{3}{2}}, \infty[$ y cóncava hacia abajo en lo $x \in]0, e^{\frac{3}{2}}$. Además, $f''(e) < 0$ por lo que en $x = e$ hay un máximo de f cuyo valor es

$$f(e) = e^{-1}\,.$$

En virtud de lo anterior podemos concluir que la gráfica de f está dada por



- Para $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xe^{-x}$, en primer lugar, notemos que g es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada está dada por

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x),$$

Además,

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \qquad &\iff \qquad e^{-x}(1 - x) = 0 \\ &\iff \qquad 1 - x = 0 \\ &\iff \qquad x = 1\,. \end{aligned}$$

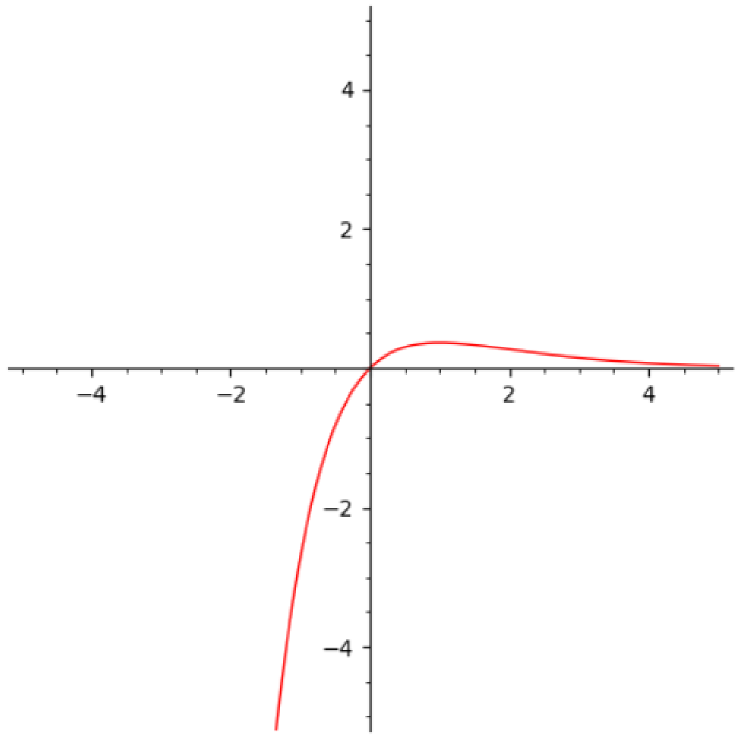
Además, dado que para todo $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} \geq 0$, podemos concluir que g es creciente para los $x \in]-\infty, 1]$ y decreciente para los $x \in]1, \infty[$. Además, f' es diferenciable y

$$g''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{x} = (x - 2)e^{-x}\,.$$

Por lo cual g tiene un punto de inflexión en $x = 2$ y es cóncava hacia arriba para los $x \in]-\infty, 2[$ y cóncava hacia abajo para los $x \in]2, \infty[$.
Por último, $g''(1) < 0$ y por lo tanto en $x = 1$ hay un máximo de g cuyo valor es

$$g(1) = e^{-1}\,.$$

En virtud de lo anterior, podemos concluir que la gráfica de g está dada por



b) A partir del ítem a) demuestre que $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$ y que $x < e^x$ para todo número real x.

Solución: Dado que f tiene un máximo absoluto en $x = e$ cuyo valor es $f(e) = e^{-1} < 1$. Entonces, para todo $x \in]0, \infty[$ se tiene,

$$f(x) \leq e^{-1} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\ln(x)}{x} < 1,$$

por lo tanto

$$\forall x \in]0, \infty[\colon \ \ln(x) < x\,.$$

Por otro lado, empleando el mismo argumento, notamos que g tiene un máximo absoluto en $x = 1$ por lo cual para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$g(x) \leq e^{-1} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad xe^{-x} < 1\,.$$

Por lo tanto, $\forall x \in \mathbb{R} \colon x < e^x$

c) ¿Existe un número real x tal que $\ln(x) = e^x$?

Solución: En virtud de lo anterior para $x > 0$ se tiene

$$\ln(x) < x \qquad \text{y} \qquad x \leq e^x$$

por lo tanto, para todo $x > 0$,

$$\ln(x) < e^x \, .$$

Por lo tanto, no hay un número real que satisfaga la ecuación $e^x = \ln(x)$.

3. La población $P(t)$ de un cierto cultivo de bacterias a las t horas se ha modelado por

$$P(t) = \frac{100 \;\; e^{0,1 \;\; t}}{1 + e^{0,1 \;\; t}}$$

Se requiere determinar el promedio de la población durante las 10 primeras horas del cultivo y el instante de tiempo en que la población es igual al promedio.

Solución: En primer lugar el promedio $\bar{P}$ de la población durante las 10 primeras horas del cultivo está dado por

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{1}{10} \int_0^{10} P(t)\, dt = \frac{1}{10} \int_0^{10} \frac{100 \;\; e^{0,1 \;\; t}}{1 + e^{0,1 \;\; t}}\, dt \\
&= 100 \int_0^{10} \frac{0,1 \;\; e^{0,1 \;\; t}}{1 + e^{0,1 \;\; t}}\, dt \\
&= 100 \ln(1 + e^{0,1 \;\; t}) \Big|_0^{10} \\
&= 100(\ln(1+e) - \ln(2)) \\
&= 100 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \approx 62,011 \, .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la población promedio es aproximadamente de 62 bacterias. Ahora, dado que f es una función continua en $[0, 10]$, por teorema del valor medio para integrales, existe un valor $c \in (0, 10)$ tal que

$$f(c) = \bar{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{100 \;\; e^{0,1 \;\; c}}{1 + e^{0,1 \;\; c}} = 100 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right),$$

es decir, usando propiedades de logaritmo, se tiene

$$\begin{aligned} e^{0{,}1\ c} &= (1+e^{0{,}1\ c})\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \\ e^{0{,}1\ c}\left(1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \\ e^{0{,}1\ c} &= \frac{\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)}{\ln\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)} \\ 0{,}1\ \ c &= \ln\left[\frac{\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)}{\ln\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)}\right] \\ c &= 10\left[\ln\left(\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right)-\ln\left(\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)\right)\right]\approx 4{,}90\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aproximadamente a las 4,9 horas la población será igual al promedio.