**Universidad de Chile**
**Programa de Bachillerato**
**Matemáticas 1**
**$2^{do}$ semestre de 2022**

# Taller de ayudantía 9
# TFC, Regla de Barrow y TVM para integrales
**04/11/2022**

En este taller aplicaremos el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la función derivada de una función definida mediante una integral, también aplicaremos la regla de Barrow para calcular primitivas simples y para calcular el área bajo la curva. Por último, aplicaremos derivadas de funciones definidas por medio de integrales para comprobar su monotonía.

**Objetivos:**

1. Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.
2. Calcular primitivas de funciones simples.
3. Aplicar la integral definida para resolver problemas.
4. Calcular el area bajo la curva por medio de integrales definidas.

## Ejercicios Propuestos

1. Considere la función $F : [1, 18] \to \mathbb{R}$ tal que $F(t) = \displaystyle\int_1^{2t} g(x)dx$, donde la función $g$ está dada por la expresión $g(x) = \left[\displaystyle\int_x^{x+1} \left(2u - \frac{1}{u^2}\right) du\right]$

   a) Determine la fórmula de la función $g$ utilizando la regla de Barrow.

   **Solución:** Aplicando la regla de Barrow, obtenemos que:

$$g(t) = \int_x^{x+1} \left(2u - \frac{1}{u^2}\right) du = \left(u^2 + \frac{1}{u}\right)\Bigg|_x^{x+1} = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

b) Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $F$ en el punto $(2, F(2))$.

**Solución:** Por el ítem anterior, obtenemos que $F(t) = \displaystyle\int_1^{2t} \left(2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) dx$.
Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$F'(t) = 2\left(2(2t) + 1 + \frac{1}{2t+1} - \frac{1}{2t}\right).$$

Se sigue que, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $F$ en el punto $(2, F(2))$ es

$$F'(2) = 2\left(8 + 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(9 - \frac{1}{20}\right) = \frac{179}{10}.$$

c) Asuma que $\dfrac{1}{2x(2x+1)} < 1$ para todo $x \geq 1$ y, a partir de esto, demuestre que la función $F$ es creciente en todo su dominio.

**Solución:** Para probar que es creciente, vamos a demostrar que la derivada de $F$ es mayor a cero. Por el ítem anterior tenemos que

$$F'(t) = 2\left(2(2t) + 1 + \frac{1}{2t+1} - \frac{1}{2t}\right) = 2\left(4t + 1 - \frac{1}{2t(2t+1)}\right).$$

Además, por hipótesis, para todo $t \geq 1$ se cumple que $\dfrac{1}{2t(2t+1)} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \dfrac{1}{2t(2t+1)}$ y también $4t > 0$. Por lo tanto, $F'(t) > 0$ para todo $t \geq 1$, es decir, $F$ es estrictamente creciente en todo el intervalo $[1, 18]$

2. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

a) Calcule el área bajo la curva de $f$ (y sobre el eje $X$) en el intervalo $[1, 4]$.

**Solución:** El área bajo la curva de $f$ (y sobre el eje $X$) en el intervalo [1,4] corresponde a

$$\int_1^4 f(x)\, dx$$

Calculando la integral, obtenemos

$$\int_1^4 f(x)\, dx = \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \left(2\sqrt{x}+x\right)\Big|_1^4 = 4+4-(2+1) = 5.$$

Por lo tanto, El área bajo la curva de $f$ (y sobre el eje $X$) en el intervalo [1,4] es igual a 5.

b) Determine (explícitamente) un valor $c \in [1, 4]$, de tal manera que la altura $f(c)$ de un rectángulo con base [1,4] tenga igual área que el área bajo la curva calculada en el ítem anterior.

**Solución:** Debemos determinar un valor $c \in [1, 4]$ que satisface la siguiente igualdad

$$(4-1)f(c) = \int_1^4 f(x)\, dx$$

Luego, el valor de $c$ está dado por

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{5}{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} + 1 = \frac{5}{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{4}{9} \\
&\Leftrightarrow c = \frac{9}{4} \in [1, 4].
\end{aligned}$$

3. Demuestre que la función

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$$

es constante para cualquier valor de $x > 0$

**Solución:** Para demostrar que la función es constante, vamos a demostrar que su derivada es cero. Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt\right) \\
&= \frac{d}{dx}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt \ + \ \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} \\
&= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = 0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F$ es constante.