Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do.* semestre de 2022

Ayudantía 7
Primitivas y sumas notables
21/10/2022

En este taller, calcularemos primitivas de funciones sencillas. También, dada la derivada de una función y su valor en un punto, determinaremos la función. Por ejemplo, a partir de la aceleración de un objeto, conociendo su velocidad y posición iniciales, obtendremos su velocidad y su posición en cualquier instante de tiempo (velocidad y posición instantánea, respectivamente). Además, para poder justificar resultados posteriores relacionados con la integral definida, en este taller trabajaremos el concepto de sumatoria y sus propiedades de linealidad, que en particular las aplicaremos para deducir una suma notable.

Objetivos:

1. Calcular primitivas de funciones básicas.
2. Encontrar la única función f que satisface las condiciones $f'(x) = g(x)$ y $f(x_0) = y_0$.
3. Representar sumas usando el símbolo Σ y utilizar sus propiedades,.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule:

   a) $\displaystyle\int \left(3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}\right) dx$

   Solución: Para determinar la integral primitiva, aplicamos la propiedad de linealidad de la integral indefinida y propiedades de potencias, obteniedo

$$\begin{aligned}\int \left(3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}\right) dx &= 3\int x^{-3}dx + \int \sqrt{x^5}dx - 2\int x^{2/3}\,dx\,,\\ &= 3\int x^{-3}dx + \int x^{5/2}dx - 2\int x^{2/3}dx\end{aligned}$$

   Finalmente, como para $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = x^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

   se concluye,

$$\int \left(3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}\right) dx = -\frac{3}{2}\cdot x^{-2} + \frac{2}{7}\cdot x^{7/2} - \frac{6}{5}\cdot x^{5/3} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

b) $\displaystyle\int z(9-z^2)^3\,dz$

Solución: Notemos que,

$$\int z(9-z^2)^3\,dz = \int \frac{-2z}{-2}(9-z^2)^3\,dz = -\frac{1}{2}\int (9-z^2)^3\,(-2z)\,dz.$$

Ahora, para $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{4}\big(9-z^2\big)^4 + c\right] = (9-z^2)^3\,(-2z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int (9-z^2)^3\,(-2z)dz = \frac{1}{4}\big(9-z^2\big)^4 + c\,.$$

De manera que,

$$\begin{aligned}\int z(9-z^2)^3 dz &= -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{4}\big(9-z^2\big)^4 + c\right]\\ &= -\frac{1}{8}\big(9-z^2\big)^4 + k, \qquad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Observación: k es una otra constante, la cual puede verse como $k = -\dfrac{1}{2}c$, sin embargo, para efectos de integración primitiva es simplemente otra constante.

c) $\displaystyle\int \frac{ax^2 + a^3\cos(x)}{\sqrt{a}}\,dx$, donde $a > 0$ es una constante.

Solución: Dado que a es constante pues la integral es respecto de x, aplicando propiedad de linealidad se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{ax^2 + a^3\cos(x)}{a^{\frac{1}{2}}}dx &= \int \frac{a(x^2 + a^2\cos(x))}{a^{\frac{1}{2}}}dx\\ &= a^{\frac{1}{2}}\int (x^2 + a^2\cos(x))dx\\ &= a^{\frac{1}{2}}\left[\int x^2dx + \int a^2\cos(x)dx\right]\\ &= a^{\frac{1}{2}}\left[\int x^2dx + a^2\int \cos(x)dx\right]\end{aligned}$$

Ahora, dado que para $c \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{sen}(x) + c\big) = \cos(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

se tiene,

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{2}}\left[\int x^2dx + a^2\int \cos(x)dx\right] &= a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x^3}{3} + a^2\operatorname{sen}(x) + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}\\ &= \frac{\sqrt{a}x^3}{3} + a^2\sqrt{a}\operatorname{sen}(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{ax^2 + a^3\cos(x)}{a^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{\sqrt{a}x^3}{3} + a^2\sqrt{a}\,\text{sen}(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Sea $x(t)$ la posición, en metros [m], de una partícula que se mueve sobre el eje X, con respecto al tiempo $t \geq 0$ medido en segundos [s]. Suponga que su aceleración $a(t) = x''(t)$ está dada por

$$a(t) = \frac{\pi}{2}\,\text{sen}(\pi t), \quad t \geq 0.$$

   a) Si la velocidad inicial de la partícula es $\frac{1}{4}$ [m/s], encuentre la velocidad instantánea $v(t) = x'(t)$.

   Solución: Recordamos que variación de la velocidad de una partícula es la aceleración, de modo que, integrando la aceleración de la partícula podemos determinar la velocidad de la misma, es decir,

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

   Entonces,

$$\begin{aligned}\int a(t)\ dt &= \int \frac{\pi}{2}\,\text{sen}(\pi t)dt \\ &= \frac{\pi}{2}\int \text{sen}(\pi t)dt\end{aligned}$$

   Además, para $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} + c\right) = \text{sen}(\pi t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int \text{sen}(\pi t)\ dt = -\frac{\cos(\pi t)}{\pi} + c\,.$$

   De manera que, la velocidad está dada por

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{\pi}{2}\int \text{sen}(\pi t)dt \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

   Ahora dado que $v(0) = \dfrac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}v(0) &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos(0\cdot\pi)}{\pi}\right) + k \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{\pi}\right) + k \\ &= -\frac{1}{2} + k\,.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3}{4} = c\,.$$

Concluyendo que

$$v(t) = -\frac{1}{2}\left(\cos(\pi t)\right) + \frac{3}{4}\,.$$

b) Si además la posición inicial de la partícula es de 5 [m], encuentre $x(t)$.
Solución: En virtud de la información antes mencionada tenemos que $x(0) = 5$, además,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int v(t)\,dt \\
&= \int \left(-\frac{1}{2}\left(\cos(\pi t)\right) + \frac{3}{4}\right) dt \\
&= \int -\frac{1}{2}\left(\cos(\pi t)\right) dt + \int \frac{3}{4} dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\cos(\pi t)\right) dt + \frac{3}{4}\int dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi}\right] + \frac{3}{4}t + c
\end{aligned}$$

Luego, como $x(0) = 5$, determinamos la contante c

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi\cdot 0)}{\pi}\right] + \frac{3\cdot 0}{4} + c &= 5 \\
c &= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la posición para cada instante esta dada por

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}(\pi t) + \frac{3t}{4} + 5\,.$$

3. Para cada ítem, encuentre la función F que satisface:

a) $F'(x) = 3x\sqrt{x} - \dfrac{1}{(x+2)^2} + \cos(x)$ para $x > 0$, y $F(0) = \dfrac{2}{3}$.

Solución: Por lo expresado en el enunciado se quiere encontrar un función F tal que

$$F(x) = \int 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad F(0) = \frac{2}{3}\,.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\int 3x\sqrt{x}-\frac{1}{(x+2)^2}+\cos(x)\,dx &= \int 3x\sqrt{x}\,dx-\int\frac{1}{(x+2)^2}\,dx+\int\cos(x)\,dx\\ &= 3\int x^{\frac{3}{2}}\,dx+\int\frac{-1}{(x+2)^2}\,dx+\int\cos(x)\,dx\end{aligned}$$

Luego, para $c\in\mathbb{R}$ al considerar la función $\varphi(x)=\dfrac{1}{x+2}+c$ se obtiene,

$$\varphi'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}.$$

Por lo cual,

$$F(x)=\int 3x\sqrt{x}-\frac{1}{(x+2)^2}+\cos(x)\,dx=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{x+2}+\operatorname{sen}(x)+c,\qquad c\in\mathbb{R}\,.$$

Ahora, como se requiere que se satisfaga la condición $F(0)=\frac{2}{3}$, se tiene

$$\begin{aligned}F(0)&=\frac{6}{5}\cdot 0^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{0+2}+\operatorname{sen}(0)+c\\ &=\frac{1}{2}+c\quad=\quad\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{2}+c=\frac{2}{3}\qquad\Longleftrightarrow\qquad c=\frac{1}{6}.$$

Concluyendo que

$$F(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{x+2}+\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{6}.$$

b) $F'(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}$ para $x\in\mathbb{R}$, y $F(0)=1$.

Solución: Por lo expresado en el enunciado se quiere encontrar un función F tal que

$$F(x)=\int\frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}\,dx\qquad\text{y}\qquad F(0)=1\,.$$

Si recordamos la regla de la cadena podemos notar que para $c\in\mathbb{R}$, al considerar la función,

$$\varphi(x)=\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+9}+c$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2+9}} \cdot (4x) \\ &= \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}.\end{aligned}$$

Por lo cual,

$$F(x) = \int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}\, dx = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+9} + c\,.$$

Ahora, como se requiere que se satisfaga la condición $F(0) = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}F(0) &= \frac{3}{2}\sqrt{2(0)^2+9} + c \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{9} + c \\ &= \frac{9}{2} + c \quad = \quad 1\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{9}{2} + c = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = -\frac{7}{2}.$$

Concluyendo que

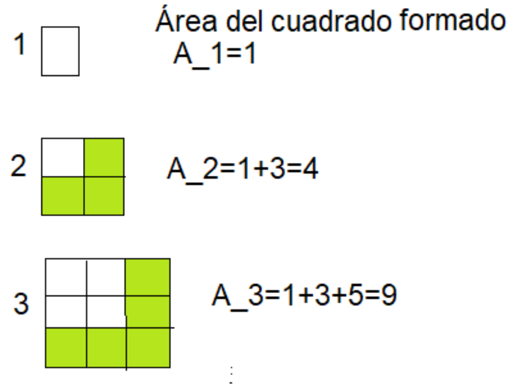
$$F(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+9} - \frac{7}{2}.$$

4. Considere el siguiente experimento:

   Etapa 1. Comience con un cuadrado cuyo lado mida 1 unidad [u], por lo cual su área mide 1 [u^2].

   Etapa 2. A continuación, al primer cuadrado agréguele tres cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 2, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 2 [u] y su área mide 4 [u^2].

   Etapa 3. De igual manera, al cuadrado formado en la etapa anterior agréguele cinco cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 3, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 3 [u] y su área mide 9 [u^2].



Responda lo siguiente.

a) En la siguiente etapa ¿cuántos cuadrados iguales al primero se deberían agregar para formar un cuadrado cuyo lado mida 4 [u]?

Solución: A partir de la información anteriormente proporcionada, el cuadrado de lado 4 [u] está compuesto de 16 cuadraditos iguales al primero, además, dado que en la tercera etapa disponemos de 9 cuadrados, deberíamos agregar 7 cuadrados adicionales.

b) Establezca una regularidad para determinar cuántos cuadrados iguales al primero debería agregar en la etapa i-ésima para así formar un cuadrado cuyo lado mida i [u].

Solución: Para $n \in \mathbb{N}$, en la primera etapa la cantidad de cuadraditos iguales al primero que deberíamos agregar para generar un cuadrado de lado 1 es cero y para cada valor natural mayor que 1 la cantidad de cuadraditos que deberíamos agregar es

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1\,.$$

De manera que la la sucesión pedida está dada por

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2n-1 & \text{si } n > 1 \end{cases}\,.$$

c) La suma de las áreas de todos los cuadrados que se han agregado hasta la etapa i-ésima (partiendo de la Etapa 1), ¿se relaciona con el área del cuadrado total formado en dicha etapa? Utilice el símbolo Σ para abreviar la suma y deduzca una expresión que represente la suma de los primeros n números naturales.

Solución: En primer lugar, dado que todos los cuadraditos son idénticos al inicial y están dispuestos de tal forma que ninguno se solapa con otro (*disjuntos*), podemos concluir que la suma del área de todos los cuadraditos adicionales y el inicial es exactamente el área del cuadrado total en cada etapa. Con notación de sumatorias:

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$$

Luego, aplicando propiedades del símbolo de sumatoria se tiene

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = n^2 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 1 + 0 + \sum_{i=2}^{n} (2i - 1) = n^2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = n^2 \end{aligned}$$

Ahora, si sumamos n veces el valor 1 resulta exactamente n, de manera que

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n\,.$$

Por lo tanto,

$$2\sum_{i=1}^{n} i - n = n^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$