



**Ayudantía 7**  
**Primitivas y sumas notables**  
21/10/2022

En este taller, calcularemos primitivas de funciones sencillas. También, dada la derivada de una función y su valor en un punto, determinaremos la función. Por ejemplo, a partir de la aceleración de un objeto, conociendo su velocidad y posición iniciales, obtendremos su velocidad y su posición en cualquier instante de tiempo (velocidad y posición instantánea, respectivamente). Además, para poder justificar resultados posteriores relacionados con la integral definida, en este taller trabajaremos el concepto de sumatoria y sus propiedades de linealidad, que en particular las aplicaremos para deducir una suma notable.

**Objetivos:**

1. Calcular primitivas de funciones básicas.
2. Encontrar la única función  $f$  que satisface las condiciones  $f'(x) = g(x)$  y  $f(x_0) = y_0$ .
3. Representar sumas usando el símbolo  $\Sigma$  y utilizar sus propiedades,.

**Ejercicios Propuestos**

1. Calcule:

a)  $\int (3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3}) dx$

b)  $\int z(9 - z^2)^3 dz$

c)  $\int \frac{ax^2 + a^3 \cos(x)}{\sqrt{a}} dx$ , donde  $a > 0$  es una constante.

2. Sea  $x(t)$  la posición, en metros [m], de una partícula que se mueve sobre el eje  $X$ , con respecto al tiempo  $t \geq 0$  medido en segundos [s]. Suponga que su aceleración  $a(t) = x''(t)$  está dada por

$$a(t) = \frac{\pi}{2} \text{sen}(\pi t), \quad t \geq 0.$$

- a) Si la velocidad inicial de la partícula es  $\frac{1}{4}$  [m/s], encuentre la velocidad instantánea  $v(t) = x'(t)$ .
- b) Si además la posición inicial de la partícula es de 5 [m], encuentre  $x(t)$ .

3. Para cada ítem, encuentre la función  $F$  que satisface:

a)  $F'(x) = 3x\sqrt{x} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cos(x)$  para  $x > 0$ , y  $F(0) = \frac{2}{3}$ .

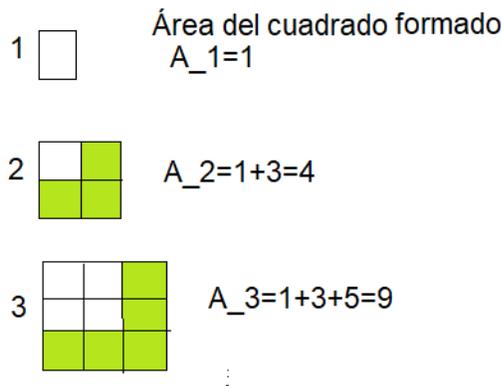
b)  $F'(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+9}}$  para  $x \in \mathbb{R}$ , y  $F(0) = 1$ .

4. Considere el siguiente experimento:

**Etapa 1.** Comience con un cuadrado cuyo lado mida 1 unidad [u], por lo cual su área mide 1 [u<sup>2</sup>].

**Etapa 2.** A continuación, al primer cuadrado agréguele tres cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 2, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 2 [u] y su área mide 4 [u<sup>2</sup>].

**Etapa 3.** De igual manera, al cuadrado formado en la etapa anterior agréguele cinco cuadrados iguales al primero, tal como se presenta en la figura 3, formando así un nuevo cuadrado cuyo lado mide 3 [u] y su área mide 9 [u<sup>2</sup>].



Responda lo siguiente.

- a) En la siguiente etapa ¿cuántos cuadrados iguales al primero se deberían agregar para formar un cuadrado cuyo lado mida 4 [u]?
- b) Establezca una regularidad para determinar cuántos cuadrados iguales al primero debería agregar en la etapa  $i$ -ésima para así formar un cuadrado cuyo lado mida  $i$  [u].
- c) La suma de las áreas de todos los cuadrados que se han agregado hasta la etapa  $i$ -ésima (partiendo de la Etapa 1), ¿se relaciona con el área del cuadrado total formado en dicha etapa? Utilice el símbolo  $\Sigma$  para abreviar la suma y deduzca una expresión que represente la suma de los primeros  $n$  números naturales.