Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do.* semestre de 2022

Taller de ayudantía 5
Gráfico de funciones y Optimización

30/09/2022

En este taller, abordaremos un conjunto de conceptos vistos hasta el momento, tales como, reglas de derivación, límtes para analizar la existencia de asíntotas verticales y horizontales, criterios de la primera y de la segunda derivada para estudiar la monotonía y concavidad de una función, entre otros. Todo este proceso tiene como finalidad esbozar el gráfico de una función dada. Además, aplicaremos el cálculo diferencial para resolver problemas contextualizados cuyo objetivo es la optimización de una función.

Objetivos:

- Realiza análisis de curva para esbozar el gráfico de una función.
- Resuelve problemas de optimización aplicando el cálculo diferencial.
- Modela y optimiza una función de acuerdo a un contexto.

Ejercicios Propuestos

1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2, -2\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

   Con el objetivo de esbozar el gráfico de la función f, siga los siguientes pasos:

   i) Encuentre las intersecciones con los ejes.

   Solución: Sabemos que la intersección con el eje Y está dado por el punto $(0, f(0))$, es decir, particularmente
   $$f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-4} = -\frac{1}{4}$$
   por lo cual la función corta al eje Y en el punto $(0, -\frac{1}{4})$. Por otro lado, sabemos que la intersección con el eje X son los puntos de la forma $(x, 0)$, entonces
   $$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^2+1}{x^2-4} = 0$$
   Luego, notemos que esta fracción es igual a cero si su numerador lo es, pero $x^2+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}-\{-2, 2\}$. Por lo tanto no existe el punto buscado. Es decir, no hay intersección con el eje X.

ii) Determine asíntotas verticales y horizontales, si es que existen.

Solución: Primero sería conveniente manipular algebraicamente la expresión, para tener una mejor óptica de la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)}$$

Ahora para encontrar las asíntotas verticales observaremos los límites laterales en los valores $\{-2, 2\}$, ya que en estos puntos la función está indeterminada, además examinando el signo de cada factor de la función podemos notar que para valores cercanos por la izquierda al -2 la función toma valores positivos. Además, en este mismo sentido podemos notar que para valores cercanos por la derecha al mismo valor -2 la función se indefine de manera positiva

	$x \in (-\infty, -2)$	$x \in (-2, 2)$	$x \in (2, \infty)$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

De manera que,

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)} = \infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)} = \infty$$

Así podemos concluir que las rectas de ecuación $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.
Para las asíntotas horizontales analizaremos los límites en el infinito, en efecto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(x^2+1)\cdot(\frac{1}{x^2})}{(x^2-4)\cdot(\frac{1}{x^2})} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to \infty} \frac{(x^2+1)\cdot(\frac{1}{x^2})}{(x^2-4)\cdot(\frac{1}{x^2})} \\ &= \lim_{x\to \infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1\end{aligned}$$

De tal forma que la recta horizontal de ecuación $y = 1$ es una asíntota horizontal.

iii) Intervalos de monotonía de f

Solución: Notemos que la función f es diferenciable en su dominio y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2+1}{x^2-4}\right)' \\ &= \frac{(x^2+1)'(x^2-4)-(x^2+1)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{(2x)(x^2-4)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{-2x(x^2+1-(x^2-4))}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{-10x}{(x^2-4)^2}\,. \end{aligned}$$

Ahora, analizamos los signos de $f'(x)$ en su dominio

	$x \in (-\infty, -2)$	$x \in (-2, 0)$	$x \in [0, 2)$	$x \in (2, \infty)$
$(x^2-4)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-10x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Así podemos concluir que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0]$ y es decreciente en los intervalos $[0, 2)$ y $(2, \infty)$.

iv) Máximos y mínimos locales de f

Solución: En virtud de lo anterior,

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-10x}{(x^2-4)^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

Entonces, los puntos críticos son los valores $x \in \{-2, 0, 2\}$. Luego, para determinar estos puntos son máximo o mínimo aplicaremos el criterio de la segunda derivada, para ello notemos que la función f' es diferenciable y su derivada está dada por

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \Big(\frac{-10x}{(x^2-4)^2}\Big)' \\
&= \frac{(-10x)'((x^2-4)^2) + 10x((x^2-4)^2)'}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{-10(x^2-4)^2 + 10x(2(x^2-4)(2x))}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{-10(x^2-4)^2 + 10x(4x(x^2-4))}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{-10(x^2-4)^2 + 40x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{(x^2-4)(-10(x^2-4) + 40x^2)}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{(x^2-4)(-10x^2 + 40 + 40x^2)}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{(x^2-4)(30x^2+40)}{(x^2-4)^4}, \qquad x \neq -2, x \neq 2 \\
&= \frac{(30x^2+40)}{(x^2-4)^3}
\end{aligned}$$

Luego, estudiamos la naturaleza de los valores extremos, para ello reemplazamos el punto crítico $x = 0$ en $f''(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \frac{(30(0)^2+40)}{((0)^2-4)^3} \\
&= \frac{(40)}{(-4)^3} \\
&= -\frac{40}{64} < 0
\end{aligned}$$

Por tanto, en virtud del criterio de la segunda derivada podemos afirmar que en $x = 0$ hay un máximo local de f. En el caso de $x \in \{-2, 2\}$ debido a la existencia de asíntotas, las imágenes son no acotadas de manera que no hay ni mínimo ni máximo. luego el único valor máximo local de f es $f(0) = -\dfrac{1}{4}$.

v) Intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo, y puntos de inflexión.

Solución: En primer lugar, encontramos los puntos de inflexión, vale decir,

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(30x^2+40)}{(x^2-4)^3} = 0$$

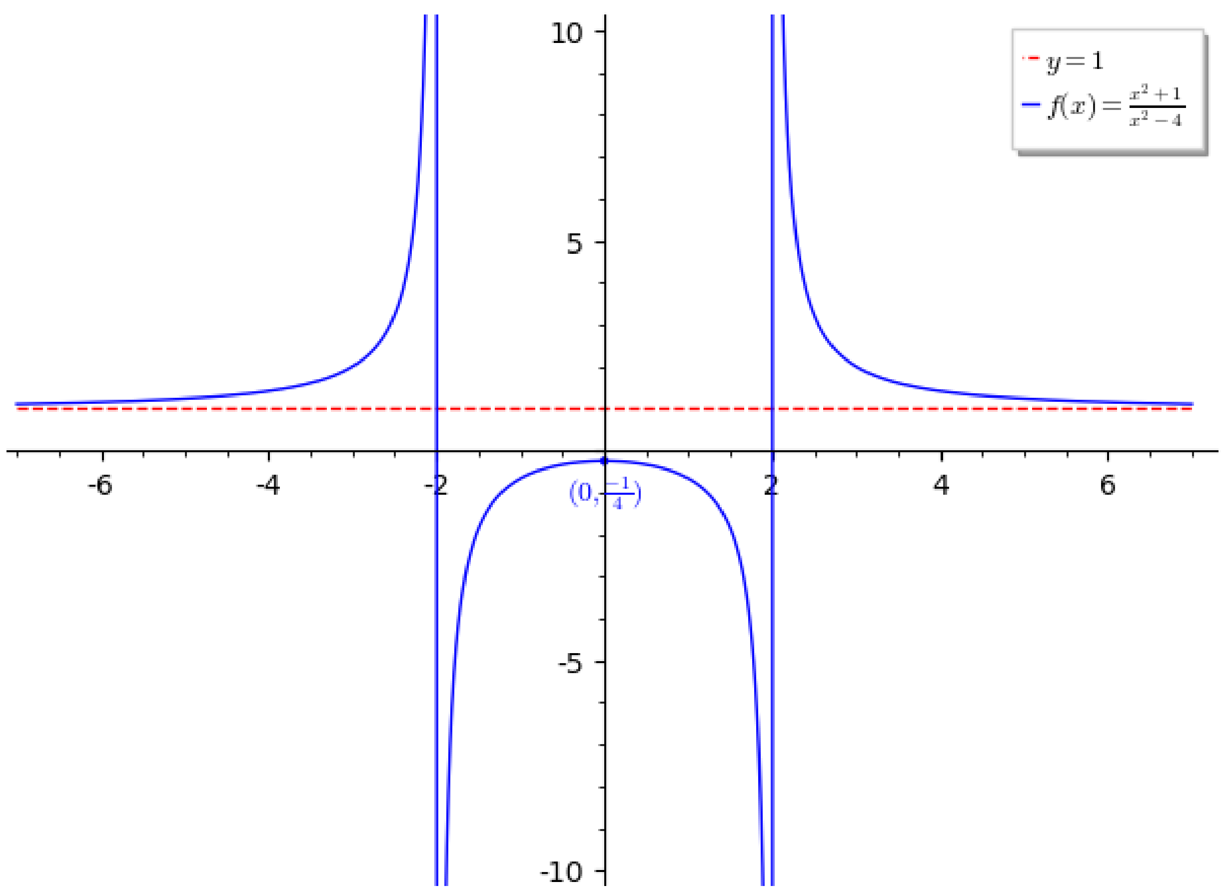
notando que $30x^2+40>0$ ya para todo $x\in\mathbb{R}$, de esta forma la función f no tiene puntos inflexión, además, examinando los signos de la regla de asignación de f'', se tiene

	$x\in(-\infty,-2)$	$x\in(-2,2)$	$x\in(2,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$30x^2+40$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Determinando que f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty,-2)$ y en el intervalo $(2,\infty)$ además de ser cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2,2)$.

Esboce el gráfico tomando en consideración cada uno de los cálculos expuestos en los pasos anteriores.

Solución:



2. Una cápsula se confecciona uniendo un casco semiesférico a cada uno de los extremos de un cilindro circular recto (sin sus bases). El volumen total de la cápsula es de 5 [cm^3]. Siga los siguientes pasos para determinar las dimensiones del cilindro que producen la mínima área superficial de la cápsula.

   a) Determine el volumen de la cápsula en función de sus dimensiones.

   Solución: En primer lugar podemos notar que el volumen de la píldora está dado por el volumen de una esfera de radio r más el volumen del cilindro del mismo radio con una altura (largo) desconocida, digamos h. Es decir,

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \quad [\text{cm}^3].$$

   b) Exprese el largo del cilindro en función del radio.

   Solución: Según el enunciado el volumen es 5 [cm^3], por lo cual podemos inferir h en términos de r, en efecto,

$$V(r) = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = \frac{1}{\pi r^2}\left(5 - \frac{4}{3}\pi r^3\right).$$

   c) Determine el área superficial de la cápsula en función del radio. Indique su dominio.

   Solución: El área de la superficie de la píldora bajo las mismas condiciones anteriores está dado por

$$A(r) = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{esfera}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{cilindro sin tapas}},$$

   luego, reemplazando h se tiene

$$\begin{aligned} A(r) &= 4\pi r^2 + \frac{2\pi r}{\pi r^2}\left(5 - \frac{4}{3}\pi r^3\right) \\ &= 4\pi r^2 + \frac{10}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^2 + \frac{10}{r}. \end{aligned}$$

   d) Determine el valor del radio para el cual el área superficial es mínima y luego determine la medida del largo.

   Solución: Notemos que la función A es diferenciable para $r > 0$ y su derivada está dada por

$$\frac{dA(r)}{dr} = \frac{8}{3}\pi r - \frac{10}{r^2}.$$

la cual se anula si

$$A'(r) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{8}{3}\pi r - \frac{10}{r^2} = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{8}{3}\pi r - \frac{10}{r^2} = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \frac{8}{3}\pi r = \frac{10}{r^2} \\
&\Longleftrightarrow \qquad 8\pi r^3 - 30 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \qquad (2\sqrt[3]{\pi}r - \sqrt[3]{30})(4\sqrt[3]{\pi^2}r^2 + 2\sqrt[3]{30\pi}r + \sqrt[3]{30^2}) = 0.
\end{aligned}$$

De donde, deducimos que el único punto crítico de la función está dado por

$$r_0 = \frac{\sqrt[3]{30}}{2\sqrt[3]{\pi}} \quad [\text{cm}]$$

Además, notamos que la función $A'(r)$ es diferenciable si $r > 0$ y su derivada está dada por

$$A''(r) = \frac{8}{3}\pi + \frac{20}{r^3}.$$

La cual evaluada en nuestro punto crítico nos da

$$A''(r_0) = \frac{8}{3}\pi + \frac{20}{\frac{30}{8\pi}} = 8\pi > 0.$$

Luego, en virtud del criterio de la segunda derivada tenemos que $A'(r_0) = 0$ y $A''(r_0) > 0$ por lo cual $A(r_0)$ es un valor mínimo de la función y está dado por

$$A(r_0) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt[3]{30}}{2\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 + \frac{10}{\frac{\sqrt[3]{30}}{2\sqrt[3]{\pi}}} = \sqrt[3]{900\pi}.$$

Finalmente, las dimensiones que minimizan el área de la píldora son

$$r_0 = \frac{\sqrt[3]{30}}{2\sqrt[3]{\pi}} \quad [\text{cm}]$$

y

$$h = \frac{1}{\pi\left(\frac{\sqrt[3]{30}}{2\sqrt[3]{\pi}}\right)^2}\left(5 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt[3]{30}}{2\sqrt[3]{\pi}}\right)^3\right) = \frac{4}{\sqrt[3]{900\pi}}(5-5) = 0[\text{cm}].$$

Es decir, la píldora con menor superficie es cuya forma es esférica.

3. Un modelo de producción de células sanguíneas en una determinada unidad de tiempo, por ejemplo de glóbulos rojos, está dado por la función

$$P(x) = \frac{Ax}{B + x^m}, \quad x > 0$$

donde $P(x)$ es la cantidad de nuevas células producidas en una unidad de tiempo posterior al instante en que hay x células sanguíneas. Donde A, B son constantes positivas y $m > 1$.

a) ¿Qué cantidad de células maximiza la producción de células?

Solución: Para $x > 0$ la función $P(x)$ es diferenciable y su derivada está dada por

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{A(B + x^m) - Ax(mx^{m-1})}{(B + x^m)^2} \\ &= \frac{AB + Ax^m(1 - m)}{(B + x^m)^2}. \end{aligned}$$

Luego, buscamos puntos críticos, es decir,

$$P(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad AB + Ax^m(1 - m) = 0\,,$$

por lo cual tenemos

$$x_0 = \sqrt[m]{\frac{B}{m - 1}}\,.$$

Ahora, notamos que $P'(x)$ es diferenciable para $x > 0$ y su deriavada está dada por

$$\begin{aligned} P''(x) &= \frac{A(1 - m)mx^{m-1}(B + x^m)^2 - 2mx^{m-1}(AB + Ax^m(1 - m))(B + x^m)}{(B + x^m)^4} \\ &= \frac{Amx^{m-1}\big((1 - m)(B + x^m) - 2(B + x^m(1 - m)\big)}{(B + x^m)^3} \\ &= \frac{Amx^{m-1}(x^m(m - 1) - B(m + 1))}{(B + x^m)^3}. \end{aligned}$$

Luego, evaluando en nuestro punto crítico, se tiene

$$\begin{aligned} P''(x_0) &= \frac{Am\left(\sqrt[m]{\frac{B}{m-1}}\right)^{m-1}\left(\left(\sqrt[m]{\frac{B}{m-1}}\right)^{m}(m - 1) - B(m + 1)\right)}{\left(B + \left(\sqrt[m]{\frac{B}{m-1}}\right)^{m}\right)^3} \\ &= \frac{-AB^2m^2\left(\frac{B}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{B\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^3} = \frac{-ABm^2\left(\frac{B}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^3} \end{aligned}$$

Ahora, dado que $m > 1$, se concluye que $P''(x_0) < 0$. Por último, notemos que $P'(x_0) = 0$ y $P''(x_0) < 0$ de forma que en x_0 hay un máximo para la función $P(x)$. Por lo tanto, la cantidad de células que maximizan la producción es

$$x_0 = \sqrt[m]{\frac{B}{m-1}}.$$

b) ¿Qué cantidad de células minimiza la tasa de producción de células?.

Solución: La tasa de producción está dada por $p'(x)$, por ende pasamos a estudiar los puntos críticos de $P''(x)$, es decir,

$$P''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{Amx^{m-1}(x^m(m-1) - B(m+1))}{(B+x^m)^3} = 0$$

dado que $Amx^m \neq 0$ se tiene,

$$(x^m(m-1) - B(m+1)) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[m]{\frac{B(m+1)}{m-1}}.$$

Por ultimo, podríamos proceder análogamente que antes, sin embargo, dado que la producción de células se maximizó la tasa de reproducción comenzaría a decrecer, de modo que el punto crítico exhibido corresponde al valor donde la tasa de reproducción se minimiza.

Finalmente, la cantidad de células que minimizan la tasa de producción es

$$x = \sqrt[m]{\frac{B(m+1)}{m-1}}.$$

Defiende tu derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.