Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do* semestre de 2022

Taller de ayudantía 4
Criterios de la primera y segunda derivada
23/09/2022

En este taller, determinaremos los posibles puntos donde una función alcanza su valor máximo y su valor mínimo. Además, aplicaremos el criterio de la primera derivada para determinar los intervalos donde la función es creciente y decreciente. Utilizaremos este criterio para determinar los extremos locales de la función. Por otro lado, analizaremos si una función satisface una ecuación en la que están incorporadas la misma función y sus derivadas. Finalmente, aplicaremos el criterio de la segunda derivada para analizar la concavidad y los puntos de inflexión de una función.

Objetivos:

- Analizar los puntos críticos para determinar el máximo valor y el mínimo valor de una función en un intervalo.
- Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los intervalos de monotonía de la función y/o sus extremos locales.
- Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión de una función.

Ejercicios Propuestos

1. Sea $f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2+\cos(x)}$.

   a) Encuentre los puntos sobre la gráfica de la función tal que la recta tangente sea horizontal.

   b) A partir de los signos de la primera derivada y el ítem anterior, concluya los máximos y minimos locales y globales de la función f.

2. En la carretera saliendo de una ciudad, la velocidad de los vehículos, medida en kilómetros por hora, que transitan entre las 2 pm y las 6 pm de un día viernes, se modela mediante:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8, \quad t \in [2, 6].$$

   a) Determine en qué intervalos, entre las 2 pm y las 6 pm, la velocidad aumenta y en qué intervalos disminuye.

   b) Determine las velocidades máxima y mínima que alcanzan estos vehículos y a qué hora se dan.

3. La posición $x(t)$, en un instante t, de una partícula que describe un movimiento armónico simple, está dada por

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi),$$

donde A, ω y ϕ son números reales constantes.

Demuestre que la función x satisface la siguiente ecuación de movimiento armónico simple

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

4. Considere la función $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x}$.

Determine los intervalos de concavidad de la función f y concluya si esta tiene puntos de inflexión.