

Ejercicio resuelto 7

1. Sean

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y - z = 0 \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Encuentre la distancia de v a W , a U y a $U^\perp$.

Solución. Consideremos lo siguiente:

- **Definición:** Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base ortogonal de W . Definimos la proyección ortogonal de $v \in \mathbb{R}^n$ sobre W como

$$\text{proy}_W v := \sum_{i=1}^k \left(\frac{v \cdot v_i}{\|v_i\|^2} \right) v_i \in W.$$

- **Proposición:** Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces:
 - Para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y $w \in W$ tenemos que $(v - \text{proy}_W v) \perp w$.
 - Dado $v \in \mathbb{R}^n$, la distancia de v a W está dada por $\|v - \text{proy}_W v\|$.

Para poder usar estos resultados, en primer lugar necesito al menos una base ortogonal para cada uno de los espacios involucrados;

- $W = \{(y + z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$, por lo que $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, al ser un conjunto l.i., es base de W . Aplicamos a este conjunto el algoritmo de Gram-Schmidt (sin normalizar, pues nos basta una base ortogonal para usar las definiciones), para obtener la base ortogonal $B_W = \{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (1, 1, 0)$ y v_2 viene de

$$\begin{aligned} z_2 &= \text{proy}_{v_1}(1, 0, 1) \\ &= \left(\frac{v_1 \cdot (1, 0, 1)}{\|v_1\|^2} \right) v_1 \\ &= \left(\frac{(1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1)}{\|(1, 1, 0)\|^2} \right) (1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{2}(1, 1, 0) \\ \Rightarrow w_2 &= (1, 0, 1) - z_2 \\ &= (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right). \end{aligned}$$

Con esto, elijo $v_2 = (1, -1, 2)$, por lo tanto $B_W = \{(1, 1, 0), (1, -1, 2)\}$.

- $U = \text{Gen}((3, 2, -1))$, por lo que $B_U = \{(3, 2, -1)\}$ es base ortogonal de U .
- Por definición

$$\begin{aligned}
U^\perp &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot u = 0, \forall u \in U\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot \alpha(3, 2, -1) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (3, 2, -1) = 0\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\} \\
&= \text{Gen}((1, 0, 3), (0, 1, 2)) ,
\end{aligned}$$

por lo que $B_2 = \{(1, 0, 3), (0, 1, 2)\}$, al ser l.i., es base de $U^\perp$, a la cual aplicamos G-S para obtener la base ortogonal $B_{U^\perp} = \{h_1, h_2\}$, donde $h_1 = (1, 0, 3)$ y h_2 está dado por

$$\begin{aligned}
z'_2 &= \left(\frac{(1, 0, 3) \cdot (0, 1, 2)}{\|(1, 0, 3)\|^2} \right) (1, 0, 3) \\
&= \frac{6}{10}(1, 0, 3) = \frac{3}{5}(1, 0, 3) \\
\Rightarrow w'_2 &= (0, 1, 2) - z'_2 \\
&= (0, 1, 2) - \frac{3}{5}(1, 0, 3) \\
&= \left(-\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5} \right) ,
\end{aligned}$$

por lo que podemos escoger $h_2 = (-3, 5, 1)$, obteniendo $B_{U^\perp} = \{(1, 0, 3), (-3, 5, 1)\}$.

Con esto calculamos las respectivas distancias:

- Distancia de v a W ($d(v, W)$):

$$\begin{aligned}
d(v, W) &= \|v - \text{proy}_W v\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{v \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{v \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 \right) \right\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 0)}{\|(1, 1, 0)\|^2} (1, 1, 0) + \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 2)}{\|(1, -1, 2)\|^2} (1, -1, 2) \right) \right\| \\
&= \left\| (1, 1, 1) - (1, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, -1, 2) \right\| \\
&= \left\| \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\| = \frac{1}{3} \|(-1, 1, 1)\| \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} .
\end{aligned}$$

- Distancia de v a U ($d(v, U)$):

$$\begin{aligned}
d(v, U) &= \|v - \text{proy}_U v\| \\
&= \left\| (1, 1, 1) - \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (3, 2, -1)}{\|(3, 2, -1)\|^2} \right) (3, 2, -1) \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| (1, 1, 1) - \frac{3+2-1}{9+4+1} (3, 2, -1) \right\| \\
&= \left\| (1, 1, 1) - \frac{2}{7} (3, 2, -1) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7} \right) \right\| \\
&= \frac{1}{7} \|(1, 3, 9)\| \\
&= \frac{1}{7} \sqrt{91} = \sqrt{\frac{13}{7}}
\end{aligned}$$

- Distancia de v a $U^\perp$ ($d(v, U^\perp)$):

$$\begin{aligned}
d(v, W) &= \|v - \text{proy}_{U^\perp} v\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{v \cdot h_1}{\|h_1\|^2} h_1 + \frac{v \cdot h_2}{\|h_2\|^2} h_2 \right) \right\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 3)}{\|(1, 0, 3)\|^2} (1, 0, 3) + \frac{(1, 1, 1) \cdot (-3, 5, 1)}{\|(-3, 5, 1)\|^2} (-3, 5, 1) \right) \right\| \\
&= \left\| (1, 1, 1) - \frac{2}{5} (1, 0, 3) - \frac{3}{35} (-3, 5, 1) \right\| \\
&= \left\| \left(1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{35}, 1 - \frac{3}{7}, 1 - \frac{6}{5} - \frac{3}{35} \right) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{24}{35}, \frac{4}{7}, -\frac{10}{35} \right) \right\| \\
&= \frac{2}{7} \left\| \left(\frac{12}{5}, 2, -1 \right) \right\| \\
&= \frac{2}{7} \sqrt{\frac{144}{25} + 4 + 1} \\
&= \frac{2}{35} \sqrt{269}.
\end{aligned}$$