Vdd o Falso Guía 3

Pregunta hecha por una compañera.

f) No existe intersección entre el plano y la recta:

$$\Pi : 2x - 4y + 6z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad L : \frac{x-2}{2} = \frac{2y+1}{-2} = 1 - z$$

Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi \cap L$, entonces se cumplen las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6z + 3 = 0 \\ \dfrac{x-2}{2} = 1 - z \\ \dfrac{2y+1}{-2} = 1 - z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y + 6z = -3 \\ x + 2z = 4 \\ 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -14 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -17 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 17/2 \end{array}\right)$$

soluciones:
$y = 7$, $x = -13$, $z = 17/2$
(o dicho de otro modo, si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi \cap L \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 17/2 \end{pmatrix}$.

Como la intersección tiene un punto, la Afirmación es falsa.

P1. (a) Sea la matriz de coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Demueste que si la ecuación $Ax = 0$ tiene una única solución entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$.

El sistema $Ax = 0$ tiene solución única
$\iff$ A es invertible $\iff$ $\det A \neq 0$.

Calculamos:

$$\det A = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (bc^2 - b^2c) - (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b)$$

$$= (bc^2 - b^2c) - (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b)$$
$$= a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$$

Supongamos $a = b = c \Rightarrow$

$\det A = 0$, $\therefore$ $a \neq b$ y $b \neq c$ y $a \neq c$.

P2. **(a)** Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que

1) A es invertible si y sólo si AA^t es invertible.
2) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$.

Si A es invertible, utilice las condiciones dadas para calcular las matrices A y B.

① Supongamos A invertible,

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Vamos que
$$\det(AA^t) = \det A \cdot \det A^t$$
$$= \det A \cdot \det A$$
$$= (\det A)^2$$

como $\det A \neq 0 \Leftrightarrow (\det(A))^2 \neq 0 \Rightarrow AA^t$ invertible $\Leftrightarrow A$ invertible.

② $B^2 = B \cdot B = (I - A)(I - A)$
$$= I^2 - 2AI + A^2$$
$$= I - 2A + A$$
$$= I - A = B$$

$\therefore B^3 = B \cdot B^2 = B \cdot B = B^2 = B$.

$\rightarrow$ Si A invertible, entonces $\exists\, A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tq

$AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

con esto tenemos que

$A^2 = A \quad / A^{-1}$.

$\Rightarrow A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow A = I$.

$\Rightarrow B = 0$. (matriz cero).

(b) En $\mathbb{R}^3$ considere las rectas

$$L_1\colon \begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2\colon \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

(1) Demuestre que L_1 y L_2 se intersectan y encuentre la intersección.

(2) Encuentre el sistema de ecuaciones cartesianas que representan a la recta L que pasa por $P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y que es perpendicular al plano que contiene a L_1 y L_2.

(3) Determine las ecuaciones de los planos que son paralelos al plano que contiene a L_1 y L_2, y que se encuentra a distancia 1 del punto en que L_1 y L_2 se intersectan.

(1) Buscamos $t, s \in \mathbb{R}$ tq

$$\left.\begin{aligned} -t &= 1 + 2s \\ 5 - 3t &= 2 + 4s \\ 1 + 2t &= 3 + s \end{aligned}\right| \sim \left.\begin{aligned} 2s + t &= -1 \\ 4s + 3t &= 3 \\ s - 2t &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos;

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4/5 \end{array}\right) \Rightarrow s = -3 = -4/5 \ \times$$

Claramente este sistema no tiene solución ∴ no hay intersección.

b) Como L_1 y L_2 además de no intersectarse no son paralelas $\left(\lambda \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda = -1/2 \\ \lambda = 2 \ \times\end{matrix} \right)$

No hay 1 plano que las contenga.

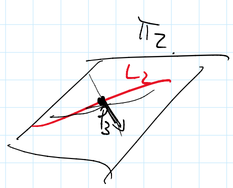
P3. Sean Π_1 el plano de ecuación $x + y + 2z = 1$, Π_2 el plano de ecuación $-x + y = 2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y cuya dirección es $D_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(a) Encuentre la ecuación de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2. Entregue un vector director de dicha recta.

(b) Encuentre el punto P_2 de intersección de la recta L_1 y Π_1.

(c) Calcular el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2.

(d) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en Π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.



a) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,/\, \begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ -x + y &= 2 \end{aligned} \right\}.$

Resolvemos ese sistema de ecuaciones;

$\boxed{y = x + 2} \Rightarrow x + (x+2) + 2z = 1$

$\Rightarrow z = \ldots -1 - 2x$

$$\boxed{y = x+2} \Rightarrow x + (x+2) + 2z = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{-1-2x}{2}}$$

$$\therefore \Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; y = x+2,\; z = \frac{-1-2x}{2},\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+2 \\ -x-1/2 \end{pmatrix} \;/\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} \;/\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;/\; x \in \mathbb{R} \right\}. = L_2.$$

$\therefore$ $\Pi_1 \cap \Pi_2$ corresponde a una recta con posición $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

y director $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; t \in \mathbb{R}.$

$\Pi_1 : x + y + 2z = 1$

$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; t \in \mathbb{R}.$

$L_1 : y = z = 1$ $\rightarrow$ Ecuación cartesiana.

con esto $\Pi_1 \cap L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; \begin{matrix} x+y+2z = 1 \\ y = z = 1 \end{matrix} \right\}.$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;/\; x + 3 = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;/\; x = -2 \right\}$$

$$\Pi_1 \cap L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) Sea Π el plano perpendicular a L_2 que pasa por P_2. Para la ecuación normal de Π necesitamos un vector perpendicular (normal) y un vector posición. Como Π perp. a L_2

[illegible]

y un vector posición. Como π perp. a L_2 $\Rightarrow n \parallel d_2$, por lo que nos basta considerar d_2 como vector normal a π y P_2 como posición. Así tenemos la ecuación

$$\pi : \quad 0 = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$0 = x+2+y-1-z+1$$

$$\Leftrightarrow \quad x+y-z+2=0. \rightarrow \text{Ec. cartesiana de } \pi.$$

Con esto vemos $\pi \cap L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ \begin{array}{l} x+y-z+2=0 \\ y = x+2 \\ z = -\frac{2x-1}{2} \end{array} \right\}.$

$\rightarrow$ Resolvemos

$$\Rightarrow \quad x+(x+2)+\frac{2x+1}{2}+2=0.$$

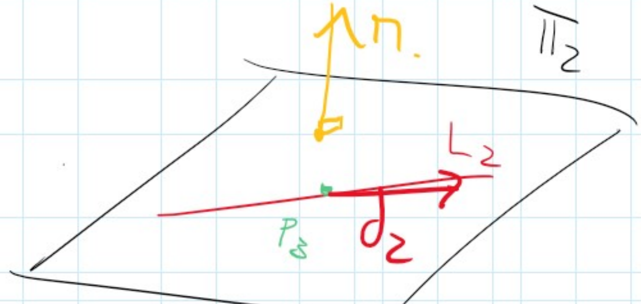
$$\Rightarrow \quad 4x+4+2x+1+4=0.$$

$$\Rightarrow \quad 6x=-9 \Rightarrow \boxed{x=-3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1/2} \Rightarrow \boxed{z=1}$$

$$\therefore \pi \cap L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{P_3\}.$$

(d) Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en Π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.



$\Pi_2 : \quad -x+y=2$ (Ec. cartesiana)

$$\Pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ \ y = 2+x \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+2 \\ z \end{pmatrix} \middle/ \ x,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle/ x,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

de donde $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \hat{\imath} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} \rightarrow 0.$$

$$= \hat{\imath} - \hat{\jmath} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = n.}$$

$$= \hat{\imath} - \hat{\jmath} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = n.}$$

Tenemos que $d_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ es vector director de L_2

luego $d = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$d = \hat{\imath}\begin{vmatrix}1 & -1\\-1 & 0\end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{vmatrix} + \hat{k}\cancel{\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}} \to 0.$$

$$= -\hat{\imath} + \hat{\jmath} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Afirmación; $L: P_3 + t(n_2 \times d_2)$ es la recta que buscamos.

1. $P_3 \in L$. ✓
2. $L \perp L_2$, en efecto, $d = n \times d_2$ es perpendicular a d_2, $\therefore L \perp L_2$.
3. $L \subset \Pi_2$; esto sucede ssi $v \in L \Rightarrow v \in \Pi_2$.

si $v \in L \Rightarrow \exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq

$$v = P_3 + t_0 d$$

Veamos si v cumple la ecuación normal

$$0 = (v - P_3)\cdot n_2$$

(Como $P_3 \in \Pi_2$ lo puedo usar como vector posición.)

$$(v - P_3)\cdot n_2 = (P_3 + t_0 d - P_3)\cdot n_2$$

$$= t_0 d \cdot n_2 = 0 \quad \text{pues } d = n_2 \times d_2.$$

Como todo elemento en L está en Π_2, L es la recta buscada. $\perp$