

2. (*) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & b & 3 \\ a & b+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a y b tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea un vector propio de A .b) Si $a = 0$ determine b de modo que A no sea diagonalizable.

a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & b & 3 \\ a & b+2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2\alpha \\ b = \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 = b.$$

$$2a + b + 2 = 0 \Rightarrow 2a + 1 + 2 = 0 \Rightarrow a = -3/2.$$

comprobamos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) si: $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & b & 3 \\ 0 & b+2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -b \\ 0 & b-\lambda & 3 \\ 0 & b+2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(b-\lambda)(1-\lambda) - 3(b+2) \\ &= (1-\lambda)(b - (b+1)\lambda + \lambda^2 - 3b - 6) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - (b+1)\lambda - 2b - 6) \end{aligned}$$

Veremos su discriminante

$$\rightarrow \Delta = b+1 + 4(2b+6) = 9b + 25$$

Si $\Delta < 0$ no hay ceros, $\therefore$ no hay + valores propios.

$$\Rightarrow \text{si: } 9b + 25 < 0 \Rightarrow b < -\frac{25}{9}$$

entonces A no diagonalizable: $\curvearrowright b \in \overline{\mathbb{R}}(-\infty, -\frac{25}{9})$

* Nota: Estos no son todos los b que hacen que falle en ser diagonalizable la matriz, pero basta determinar alguno para efectos de esta pregunta.)