

Ejercicio resuelto 10

- Determine si la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. De ser así, encuentre la matriz diagonal D y la matriz invertible P tales que $C = PDP^{-1}$.

Solución. Primero encontramos el polinomio característico de C como sigue:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5 - \lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & -5 - \lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) - 3(3\lambda + 6) + 3(3\lambda + 6) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda + 2)^2. \end{aligned}$$

Al igualar a cero dicho polinomio podemos ver que los valores propios de C son $\lambda_1 = 1$, de multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = -2$, de multiplicidad algebraica 2.

- Espacio propio asociado a λ_1 :

$$\begin{aligned} \ker(C - I_3) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (C - I_3)v = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 3z = 0, 3x + 6y + 3z = 0, 3x + 3y = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -y, x = -y\} \\ &= \{(-y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Gen}(-1, 1, -1) = \text{Gen}(1, -1, 1) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos multiplicidad geométrica de λ_1 es igual a su multiplicidad algebraica, 1. Escogemos el vector $v_1 = (1, -1, 1)$ como vector propio asociado a λ_1 .

- Espacio propio asociado a λ_2 :

$$\begin{aligned}
\ker(C + 2I_3) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (C + 2I_3)v = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, \} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} \\
&= \{(-y - z, y, z) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Gen}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))
\end{aligned}$$

Digamos $v_2 = (-1, 1, 0)$ y $v_3 = (-1, 0, 1)$. Estos dos vectores son l.i. , por lo que tenemos multiplicidad geométrica de λ_2 igual a su multiplicidad algebraica, 2. Así obtenemos los vectores propios v_2 y v_3 asociados a λ_2 .

Como las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada valor propio coinciden, sabemos que C es una matriz diagonalizable.

La matriz diagonal D buscada corresponde a la matriz cuyos coeficientes de la diagonal son los valores propios de C . P corresponde a la matriz cambio de base $[id]_B^{\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, base formada por vectores propios de C .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

NOTA: Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $C = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ es su representación en base canónica. Si B es una base formada con vectores propios de T , se tiene que $[T]_B^B$ siempre es matriz diagonal (¿Por qué?). Si consideramos la igualdad $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [id]_B^{\mathcal{C}} [T]_B^B [id]_{\mathcal{C}}^B$ tenemos una descripción detallada de lo que significa la igualdad $C = PDP^{-1}$.