Ejercicios extra

lunes, 8 de noviembre de 2021

- Demuestre que una función lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ no puede ser inyectiva.
- Demuestre que una función lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ no puede ser epiyectiva.
- Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dos funciones lineales. Demuestre que la función compuesta $g \circ f$ no es biyectiva. ¿Puede ser $f \circ g$ biyectiva?
- Sea $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ lineal e inyectiva. Demuestre que f es biyectiva.
- Sea $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ lineal y epiyectiva. Demuestre que f es biyectiva.

Una función lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tiene matriz A con respecto a las bases standard, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -12 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Escriba $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Determine si las siguientes aplicaciones f son lineales o no. Para cada aplicación *lineal* f dé su correspondiente matriz $[f]_{B,B'}$ para las bases B y B' dadas.

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix},\quad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ B'=B.$

(b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix},\ B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$

(c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x-y,\ B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ B'=\{1\}.$

(d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x-y,\ B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},\ B'=\{1\}.$

(e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},\ B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ B'=B.$

(f) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ B=\left\{\begin{pmatrix}188\\-10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5540\\-8765\end{pmatrix}\right\},\ B'=B.$

(g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix},\ B=\left\{\begin{pmatrix}188\\-10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5540\\-8765\end{pmatrix}\right\},\ B'=B.$

(h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},\ B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ B'=B.$

(i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x+z\\z+y+xy\end{pmatrix},\ B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$ $B'=B.$

(j) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x+z\\z+y+x\end{pmatrix},$ B y B' como en (i).

(k) $f:V_5\to V_4,\quad f\big(p(x)\big)=p'(x)$ (el polinomio dado por la derivada), donde V_n denota el espacio vectorial que consiste de todos los polinomios con coeficientes reales y de grado a lo más n. Las bases son $B=\{1,x,x^2,...,x^5\}$ y $B'=\{1,x,x^2,...,x^4\}$.

(l) $f:V_4\to V_5,\quad f\big(p(x)\big)=\int_0^x p(t)\,dt$, con V_n como en el ejercicio anterior, y bases $B=\{1,x,x^2,...,x^4\},\ \ B'=\{1,x,x^2,...,x^5\}$.