Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2021

Ejercicio resuelto 8

1. Determine si la siguiente función es o no transformación lineal. De serlo encuentre una base y dimensión de su núcleo e imagen. ¿Es isomorfismo?.
$$T : M_{23}(\mathbb{R}) \to M_{32}(\mathbb{R}) \text{ tal que } T(A) = A^T \ .$$
2. Determine si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por $T(x) = Ax$ con $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, es una transformación lineal. De serlo, ¿Qué representan su imagen y su núcleo?.

Solución. 1. Sean $A, B \in M_{23}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Vemos que

- $$\begin{aligned} T(A+B) &= (A+B)^T \\ &= A^T + B^T \qquad \text{(por propiedad de la traspuesta)} \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T(\alpha A) &= (\alpha A)^T \\ &= \alpha A^T \qquad \text{(por propiedad de la traspuesta)} \\ &= \alpha T(A) \end{aligned}$$

Por lo tanto T es función lineal. Vemos núcleo e imágen:

- $$\begin{aligned} \ker(T) &= \{A \in M_{23}(\mathbb{R}) \ \mid \ T(A) = 0\} \\ &= \left\{A \in M_{23}(\mathbb{R}) \ \mid \ A^T = 0\right\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{23}(\mathbb{R}) \ \mid \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{23}(\mathbb{R}) \ \mid \ a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0 \right\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

El único vector perteneciente al núcleo (o kernel) de T es el vector cero, por lo que decimos que no tiene base y su dimensión es 0. Además esto nos dice que la función (o transformación) es inyectiva.

Veremos primero si es que la función es sobreyectiva para obtener la imagen:

Para cualquier matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{32}(\mathbb{R})$ basta considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{23}(\mathbb{R})$ la cual es tal que $T(A) = M$, lo que me dice que T es sobreyectiva, es decir $\mathrm{Im}(T) = M_{32}(\mathbb{R})$.

Otra forma de encontrar la imagen de una transformación lineal es usando la definición de imagen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \{T(A) \mid A \in M_{23}(\mathbb{R})\} \\
&= \left\{A^T \mid A \in M_{23}(\mathbb{R})\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Gen}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= M_{32}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Siendo cierta la última igualdad pues el conjunto generador que nos apareció no era más que la base canónica de $M_{32}(\mathbb{R})$.

De todos modos, como T es una función biyectiva y lineal, decimos que T es isomorfismo entre $M_{23}(\mathbb{R})$ y $M_{32}(\mathbb{R})$.

Solución. 2. Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz fija. Sean además los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, y un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Vemos que

- $$\begin{aligned} T(x+y) &= A(x+y) \\ &= Ax + Ay \qquad \text{(distributibidad de la multiplicación de matrices)} \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T(\alpha x) &= A(\alpha x) \\ &= \alpha Ax \\ &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

Con esto, T es lineal. Pero escribiré este resultado como sigue: **Toda matriz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ define una transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.**

Vemos ahora el núcleo e imagen T ;

- $$\begin{aligned} \ker(T) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid \text{existe } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } T(x) = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid \text{existe } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax = y\} \end{aligned}$$

¿Qué representan su imagen y su núcleo?

Un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas se representa como $Ax = y$, donde $A \in M_{mn}$ es la matriz de coeficientes, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector formado por las incógnitas y el vector $y \in \mathbb{R}^m$ los valores constantes del sistema.

- $\ker(T)$ corresponde al conjunto solución al sistema homogéneo $Ax = 0$.

- $\mathrm{Im}(T)$ es el conjunto de todos los vectores y tales que el sistema $Ax = y$ tiene solución. Si consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $C = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, como $x \in \mathbb{R}^n$, existen escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tales que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Entonces, si $y \in \mathrm{Im}(T)$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} y &= Ax \\ &= A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A e_i \qquad \text{(Linealidad)} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i \quad , \end{aligned}$$

donde $Ae_i = C_i \in \mathbb{R}^m$ corresponde a la i-ésima columna de A. Notamos que cada elemento de $\mathrm{Im}(T)$ es combinación lineal de las columnas de A. En otras palabras, $\mathrm{Im}(T)$ es el subespacio generado por los vectores columna de A.