Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y geometría, segundo semestre 2021

Ejercicio Resuelto 2 - Posible solución Taller 1

1. Sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^4$. Si $\vec{z} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha+\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$

   (a) Determine el o los valores de α y β tal que $\vec{z}$ sea ortogonal a $\vec{x}$ e $\vec{y}$. ¿Es el conjunto $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ ortogonal?.

   (b) ¿Existen valores para α y β tal que $\vec{z}$ tenga norma igual a 1?¿Es ortonormal el conjunto $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$?

   (c) Determine el o los valores de α y β tal que $\vec{z}$ sea paralelo a $\vec{x} - \vec{y}$.

Solución. **(a)** De la definición, dos vectores son ortogonales si su producto punto es 0, por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha - 3(\alpha+\beta) &= 0 \\ -\alpha - (\alpha+\beta) - 2\beta &= 0 \end{aligned}$$

Lo que nos deja la ecuación única $\beta = \frac{-2}{3}\alpha$. Es decir, el conjunto solución está dado por

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \vec{z} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha+\beta \\ 2\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \;,\; \beta = \frac{-2}{3}\alpha \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \frac{\alpha}{3} \\ \frac{-4\alpha}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{\alpha}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

(Notamos que los vectores $\vec{z}$ que cumplen con lo buscado son todos los vectores que son paralelos al vector $(3\ 0\ 1\ -4)$).

El conjunto $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ no es ortogonal pues $\vec{x} \cdot \vec{y} = -1 + 4 + 3 = 6 \neq 0$.

(b) Dado un vector en $\mathbb{R}^n$ siempre podemos normalizar (encontrar un vector paralelo de norma 1). Sea $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{z}\|}\vec{z}$ es un vector unitario. En efecto;

$$\|\vec{e}\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{z}\|}\vec{z} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{z}\|} \right| \|\vec{z}\| = \frac{\|\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|} = 1 \ .$$

Ahora, como $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in S$ y $\|\vec{v}\| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$, consideramos el vector $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{26}}\vec{v}$, el cual es unitario y perpendicular a $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

(La existencia de este vector implica que hay valores de α y de β que cumplen con lo señalado). (Además de $\vec{e}$ hay otra solución; $-\vec{e}$).

El conjunto $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ no es ortonormal pues no es conjunto ortogonal. Además $\|\vec{x}\| = \sqrt{14} \neq 1$.

(c) Tenemos que $\vec{w} = \vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y vemos cual es su producto punto con $\vec{z}$:

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = 2\alpha - 2(\alpha + \beta) + 2\beta = 0 \ ,$$

lo que nos dice que $\vec{z}$ es perpendicular a $\vec{w}$. Dos vectores que son perpendiculares no pueden ser paralelos. Lo demostramos acá:

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \lambda \vec{z} \\ \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{z} &= \lambda \vec{z} \cdot \vec{z} \\ \Rightarrow 0 &= \lambda \|\vec{z}\|^2 \end{aligned}$$

Como ignoramos al vector nulo com candidato a ser paralelo, la única posibilidad que nos dá la última ecuación es que $\lambda = 0$. Concluímos que no existe $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{w} = \lambda \vec{z}$, lo que, por definición, nos dice que estos vectores no son paralelos para ningún valor de α y β.

---

2. Obtenga $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que su norma sea $\sqrt{2}$ y sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución. Consideremos el vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Tenemos que este vector es perpendicular a ambos vectores participantes del producto cruz.

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\hat{i} - 2\sqrt{2}\hat{j} + (\sqrt{2}+3)\hat{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora basta escoger un escalar adecuado para que el vector tenga la norma deseada; el vector $\vec{x} = \frac{\sqrt{2}}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$ es paralelo a $\vec{w}$ (por lo tanto perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$) y de norma $\sqrt{2}$.

Otra forma de resolver esta pregunta:

Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = 0$ y $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$, es decir

$$\begin{aligned} \sqrt{2}a + b &= 0 \\ -3a + b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Lo que nos da las soluciones $b = -\sqrt{2}a$, $c = \frac{(3+\sqrt{2})a}{2}$. En otras palabras, el conjunto solución a este sistema está dado por

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\ ,\ b = -\sqrt{2}a\ ,\ c = \frac{(3+\sqrt{2})a}{2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -\sqrt{2}a \\ \frac{(3+\sqrt{2})a}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Con esto escogemos un vector cualquiera de este conjunto, digamos $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$, obteniendo como antes el vector $\vec{x} = \frac{\sqrt{2}}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$, el cual tiene las características deseadas.

---

3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) El ángulo que forman las proyecciones $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ y $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ es el mismo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   (b) Si $\vec{u}\ \ \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ y el ángulo entre ellos es $30°$, entonces $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3}$.

Solución. (a) Sean $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. El ángulo α entre estos vectores está dado por la condición

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

y tenemos además que

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|} \\ \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \|\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} \end{aligned}$$

Sea β el ángulo entre $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ y $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$, luego

$$\cos\beta = \frac{\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} \cdot \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}{\|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}\|\|\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}\|}$$

Ahora, notamos que

$$\begin{aligned}
\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} \cdot \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} &= \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right) \cdot \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right) \\
&= \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^3}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2} \\
\|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}\|\|\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}\| &= \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \\
\Rightarrow \cos\beta &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \cos\alpha \ .
\end{aligned}$$

Como vemos ángulos entre 0 y π la última igualdad implica que $\alpha = \beta$. Concluímos que la afirmación es verdadera.

(b) Por definición del ángulo entre vectores tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} &= \cos 30^\circ \\
\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \\
&= 3\sqrt{3} \ .
\end{aligned}$$

Por otro lado, por la definición de norma, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
&= 16 + 4 + 6\sqrt{3} = 20 + 6\sqrt{3} \neq \sqrt{3} \ .
\end{aligned}$$

Concluímos que la afirmación es falsa.