**Universidad de Chile**
**Programa Académico de Bachillerato**
**Álgebra y Geometría, segundo semestre 2021**

# Producto cruz como área

**1.-** Demuestre que el área de un paralelógramo de lados $u$ y $v$ en $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ está dada por $\|u \times v\|$.

**Solución.** Para demostrar este resultado primero veremos algunas proposiciones;

- **Definición:** El ángulo entre $u$ y $v$ está dado por la condición

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \ (\Longrightarrow u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta\ ).$$

- **Proposición 1:** Para todo $u, v \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ se cumple que

$$(u \cdot v)^2 + \|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2\ .$$

**Dem:** Calcularemos cada uno de los elementos por separado por sus definiciones (recordar que $\|u\|^2 = u \cdot u$) :

$$\begin{aligned}(u \cdot v)^2 &= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + 2u_1v_1u_3v_3 + 2u_3v_3u_2v_2\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u \times v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 - 2u_3v_3u_2v_2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 - 2u_1v_1u_3v_3 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u\|^2\|v\|^2 &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ &= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2\ .\end{aligned}$$

De estos cálculos podemos ver que si efectuamos la suma efectivamente se cumple que $(u \cdot v)^2 + \|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.

- **Proposición 2:** Para todo $u, v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ se tiene que

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta \ .$$

**Dem:**

$$\begin{aligned}
\|u \times v\|^2 &= \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 - (\|u\|\|v\| \cos\theta)^2 \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2\theta \ ,
\end{aligned}$$

desde donde podemos concluir, aplicando raiz a ambos lados, que

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\||\sin\theta| = \|u\|\|v\| \sin\theta \ .$$

La última igualdad es cierta pues $\theta \in [0, \pi] \Longrightarrow \sin\theta \geq 0$.

Podemos ahora con estos resultados plantear una muestra de que el área de un paralelógramo de lados $u$ y $v$ en $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ está dada por $\|u \times v\|$.

**Dem.** Sea $\theta$ el ángulo entre $u$ y $v$ y $A$ el área del paralelogramo determinado por estos vectores. Si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, entonces $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\|u \times v\| = |\lambda|\|v \times v\| = 0$. Además $A = 0$, por lo que en este caso se cumple la afirmación.

Supongamos ahora que $\theta \neq 0, \pi$, y que el paralelogramo formado por ambos vectores es como en el diagrama [1]:

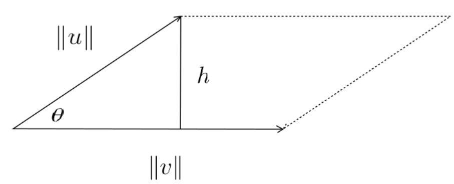


Fig. 1: Paralelogramo descrito por $u$ y $v$.

El área de un paralelogramo corresponde a una base por su correspondiente altura. Consideraremos la base de largo $\|v\|$ y la altura $h$. Como podemos ver, aplicando trigonometría al triángulo rectángulo que se forma se tiene que

$$\sin\theta = \frac{h}{\|u\|} \text{ ,es decir, } \ h = \|u\| \sin\theta \ .$$

Vemos entonces que

$$A = \|v\|h = \|v\|\|u\| \sin\theta = \|u \times v\| \ .$$

[1] El diagrama corresponde al caso en que $\theta$ es agudo. Si $\theta$ es obtuso, el otro ángulo del paralelógramo será agudo, por lo que usamos ese ángulo, lo que equivale a utilizar el vector $u$ como base para el cálculo, con lo que la demostración se realiza de forma totalmente análoga.