Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2021

Ejercicio Resuelto 9

- Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha-3 \\ 2 & 1 & \alpha & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores de α y β de manera que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones y no tenga solución.

Solución. Procedemos buscando la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema, analizando casos cuando corresponda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & \beta \\ -1 & 1 & 0 & 1 & \beta^2 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha-3 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4-2f_1]{f_2+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & \beta \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \beta^2+\beta \\ 0 & 3 & 3 & \alpha-3 & 0 \\ 0 & -3 & \alpha-6 & 0 & -2\beta-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4+f_2]{\substack{f_1-f_2 \\ f_3-f_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -\beta^2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \beta^2+\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 & -\beta^2-\beta \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 0 & \beta^2-\beta-2 \end{array}\right) = (A_1|b_1)$$

- **Caso** 1: Supongamos $\alpha - 3 = 0$, entonces tenemos que

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -\beta^2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \beta^2+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta^2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2-\beta-2 \end{array}\right)$$

de donde vemos que

$$\beta^2+\beta = 0 \ \text{ y } \ \beta^2-\beta-2 = 0 \ \Rightarrow \ \beta(\beta+1) = 0 \ \text{ y } \ (\beta-2)(\beta+1) = 0 \ .$$

- **Caso** 1.1: supongamos $\beta \neq -1$. De las igualdades anteriores se tiene que

$$\beta = 0 = \beta - 2 \ \Rightarrow \ 0 = -2 \ ,$$

lo cual es falso (equivalentemenete, la última fila sería de la forma $(0\ 0\ 0\ 0 \mid 2)$). Concluímos que en este caso el sistema **no tiene soluciones**.

- **Caso** 1.2: supongamos $\beta = -1$, entonces

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Esta forma escalonada no tiene inconsistencias. Además hay 2 pivotes, y al ser estos menos que la cantidad de columnas, el sistema **tiene infinitas soluciones**.

- **Caso** 2: Supongamos $\alpha - 3 \neq 0$, entonces

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -\beta^2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \beta^2+\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 & -\beta^2-\beta \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 0 & \beta^2-\beta-2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -\beta^2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \beta^2+\beta \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 0 & \beta^2-\beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 & -\beta^2-\beta \end{array}\right).$$

Como hay 4 pivotes y 4 columnas, en este caso el sistema tiene **solución única**.

Resumiendo: El sistema $(A|b)$ tiene **solución única** para $\alpha \neq 3$ y $\beta \in \mathbb{R}$, **infinitas soluciones** si $\alpha = 3$ y $\beta = -1$ y **no tiene soluciones** cuando $\alpha = 3$ y $\beta \neq -1$.