Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2021

Posible solución Taller 3

1. Demuestre que $\left|\frac{1-z}{\bar{z}-1}\right|$.
2. Resuelva las siguientes ecuaciones complejas:
   (a) $|z|+z=2+i$.
   (b) $z^2=1+2i$.
3. Verdadero o Falso;
   (a) Si $|\operatorname{Re}(z)|\leq 1$ y $|\operatorname{Im}(z)|\leq 1$, entonces $|z|\leq 1$.
   (b) $|z-\bar{z}|\leq 2|z|$.

Solución.

1. Sabemos que $|z|^2=z\bar{z}$. Dicho esto vemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1-z}{\bar{z}-1}\right|^2 &= \left|(1-z)(\bar{z}-1)^{-1}\right|^2 \\
&= (1-z)(\bar{z}-1)^{-1}\overline{(1-z)(\bar{z}-1)^{-1}} \\
&= (1-z)(\bar{z}-1)^{-1}\overline{(1-z)}\ \overline{(\bar{z}-1)^{-1}} \\
&= (1-z)(\bar{z}-1)^{-1}(1-\bar{z})(z-1)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-z}{z-1}\right)\left(\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}-1}\right)=1 \\
\Rightarrow \left|\frac{1-z}{\bar{z}-1}\right| &= 1.
\end{aligned}
$$

2. (a) Si ponemos $z=a+bi$ tenemos que $2+i=\sqrt{a^2+b^2}+a+bi$. Dos complejos son iguales si coinciden en parte real y en parte imaginaria, es decir

$$
\begin{aligned}
1 &= b \\
2 &= a+\sqrt{a^2+b^2} \\
\Rightarrow\ 2-a &= \sqrt{a^2-1} \\
4-4a+a^2 &= a^2-1 \\
\Rightarrow a &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Corroboramos la solución $z=\frac{3}{4}+i$ en la ecuación;

$$
\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}+\frac{3}{4}+i=\sqrt{\frac{25}{16}}+\frac{3}{4}+i=2+i\ .
$$

(b) Sea $w_0 = 1 + 2i$. En el plano complejo w_0 corresponde al punto $(1,2)$ (forma canónica). Con esto tenemos su forma polar

$$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\tan(\theta_0) = 2 \ \Rightarrow\ \theta_0 = \tan^{-1}(2)$$

Con esto $w_0 = \sqrt{5}\ \mathrm{cis}(\theta_0)$. A partir de esto tenemos dos soluciones a la ecuación:

$$w_1 = \sqrt[4]{5}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[4]{5}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right)$$

Para encontrar la forma canónica de w_1 y w_2 basta cosiderar que

$$\cos(\theta_0) = \cos(\tan^{-1}(2)) = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Para w_1

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_0) &= \cos(\tan^{-1}(2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\
\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos(\theta_0)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \\
\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos(\theta_0)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\
\Rightarrow w_1 &= \sqrt[4]{5}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)
\end{aligned}$$

Para w_2

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right) &= -\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\
&= -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \\
\sin\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right) &= -\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\
&= -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\
\Rightarrow w_2 &= -\sqrt[4]{5}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)
\end{aligned}$$

3. (a) Sea $z = 1 + i$. Tenemos que $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$, pero además $|z| = \sqrt{2} > 1$. Concluímos que la afirmación es falsa.

(b) Notamos primero que

$$|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \Rightarrow |z|^2 \geq (\operatorname{Re}(z))^2 \Rightarrow |z| \geq |\operatorname{Re}(z)|\ .$$

Con esto tenemos que

$$|z - \bar{z}| = |2\operatorname{Re} z| \leq 2|z|\ .$$

Concluímos que la afirmación es verdadera.