Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2021

Ejercicio Resuelto 4

- Halle la recta que es paralela a la recta de ecuación $12x-5y-4=0$ y está a 3 unidades de distancia de ella.

Solución. Sean

$$\begin{aligned} L_1 : \quad & y = \frac{12}{5}x - \frac{4}{5} \\ \text{y} \quad L_2 : \quad & y = mx + n \ , \end{aligned}$$

donde L_1 es la recta dada y L_2 alguna recta tal que está a 3 unidades de distancia de L_1.

Comentario: Como L_1 y L_2 están a una distancia positiva, necesariamente deben ser paralelas (si no son paralelas, entonces se intersectan en uno o en todos los puntos, luego, por definición de distancia entre dos conjuntos, estrían a distancia 0), es decir, $m = \frac{12}{5}$. Además, nuevamente por ser paralelas, la distancia entre L_1 y L_2 corresponde a la distancia de cualquier punto en L_1 a la recta L_2. Como consecuencia, existe L_2', una recta paralela a L_1 y L_2 (por lo tanto distintas todas entre sí) que también está a 3 unidades de distancia de L_1. (La recta L_1 es el lugar geométrico que equidista de dos puntos fijos, por lo que dado un punto fijo $P_2 \in L_2$, hay un único punto reflejo de P_2 con respecto a L_1 tal que L_1 es el lugar geométrico de puntos que equidistan de P_2 y su reflejo. Como podemos hacer esto con todos los puntos de L_2, L_2' corresponde a reflejar L_2 con respecto a L_1). Ver Fig. 1.

Dicho esto, escribimos L_2 en su forma general (para usar fórmula de distancia de un punto a una recta) y buscamos un punto cualquiera en L_1 para medir la distancia;

Consideramos el punto $P(2,4)$ (el cual pertenece a L_1 pues $12\cdot 2 - 5\cdot 4 - 4 = 0$) y escribimos $L_2 : \quad 0 = mx - y + n$. Entonces

$$\begin{aligned} 3 &= d(P, L_2) \\ &= \frac{|m\cdot 2 - 1\cdot 4 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\left|\frac{12}{5}\cdot 2 - 1\cdot 4 + n\right|}{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\left|\frac{4}{5} + n\right|}{\sqrt{\frac{169}{25}}} \\ &= \frac{|4+5n|}{13} \\ \Leftrightarrow 39 &= |4+5n| \ , \end{aligned}$$

de donde obtenemos las soluciones

$$39 = 4 + 5n \;\Rightarrow\; n = 7$$
$$39 = -4 - 5n' \;\Rightarrow\; n' = -\frac{43}{5}\ ,$$

las cuales determinan dos rectas, L_2 y L_2', ambas paralelas a L_1 y a 3 unidades de distancia de esta, donde

$$L_2: \; y = \frac{12}{5}x + 7$$
$$L_2': \; y = \frac{12}{5}x - \frac{43}{5}\ .$$

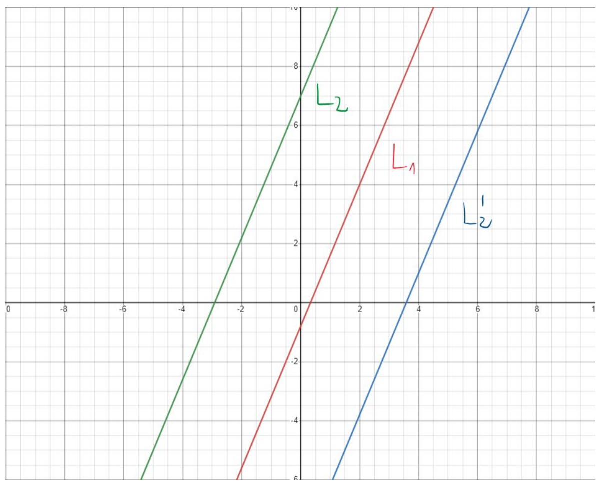

Fig. 1: Gráficas de L_1, L_2 y L_2'.