Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2021

Ejercicio resuelto 2

- Pruebe que

$$\binom{n}{0}\binom{n}{p} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p}\binom{n-p}{0} = 2^p\binom{n}{p} \; .$$

Solución. En primer lugar, reescribimos el enunciado en forma de sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p} \; .$$

Ahora, consideramos $a_k = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ algún coeficiente de esa suma:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(p-k)!\,(n-k-(p-k))!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(p-k)!\,(n-p))!} \\
&= \frac{p!}{p!}\cdot\frac{n!}{k!\,(p-k)!\,(n-p))!} \\
&= \frac{n!}{p!\,(n-p))!}\cdot\frac{p!}{k!\,(p-k)!} \\
&= \binom{n}{p}\binom{p}{k}.
\end{aligned}$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k} \\
&= \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}2^p.
\end{aligned}$$