Propiedades de funciones:

Def: Sea $f: A \to B$ una función.

i) Si $\forall\, x, y \in A$ tq $x < y$ se cumple $f(x) \le f(y)$, f se dice creciente

ii) " " " " " " $f(x) \ge f(y)$, f se dice decreciente

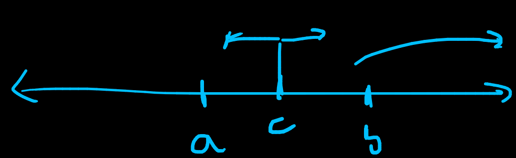
iii) " " " " " " $f(x) < f(y)$, f se dice estrictamente creciente

iv) " " " " " " $f(x) > f(y)$, f se dice estrictamente decreciente

•) Si una función f cumple cualquiera de las 4 definiciones anteriores para todo par de elementos de su dominio, la función se dice monótona.

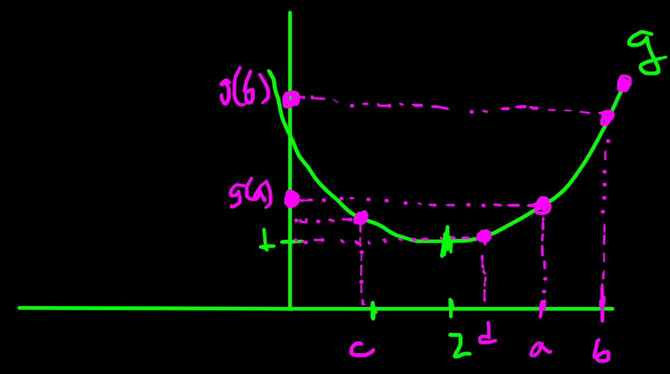
•) Si $f: A \to B$ cumple alguna de las 4 definiciones para un intervalo $I \subseteq A$, entonces I se dice un intervalo de monotonía o intervalo de crecimiento o decrecimiento según corresponda.

Tal I debe ser el máximo intervalo "conexo" → wikipedia



$]a,c[\,\cup\,]c,b[\,=\,]a,b[\setminus \{c\}$ no es conexo.

Ejemplo: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1\cdot(x-2)^2 + 1$.



$a < b \to g(a) < g(b)$

Observe que en la gráfica, $c < d$ pero $g(c) > g(d)$

Bajo esta observación, g no es monótona porque cambia su crecimiento. Entonces g tiene intervalos de monotonía:

◦) g es creciente en $[2, +\infty[$ (También lo es en el sentido estricto)

◦) g es decreciente $]-\infty, 2]$ (〃)

Ejemplo: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -2|x+3| = \begin{cases} -2(x+3), & \text{si } x \geq -3 \\ -2(-(x+3)), & \text{si } x < -3 \end{cases}$

$-2(-(x+3)) = 2(x+3)$

Afirmación: h es creciente en $]-\infty, -3]$

Dem: Sean $x, y \in]-\infty, -3]$ tq $x < y$.

Queremos probar que $h(x) < h(y)$. Para ello, iniciaremos con la desigualdad $x < y$ para terminar en $h(x) < h(y)$.

$$x < y \iff x+3 < y+3 \iff \overset{h(x)}{2(x+3)} < \overset{h(y)}{2(y+3)}$$

Como $\underline{x, y \in \,]-\infty, -3]}$ $\Rightarrow |x+3| = -(x+3) \wedge |y+3| = -(y+3)$

$\Rightarrow -2|x+3| = 2(x+3) \wedge -2|y+3| = 2(y+3)$

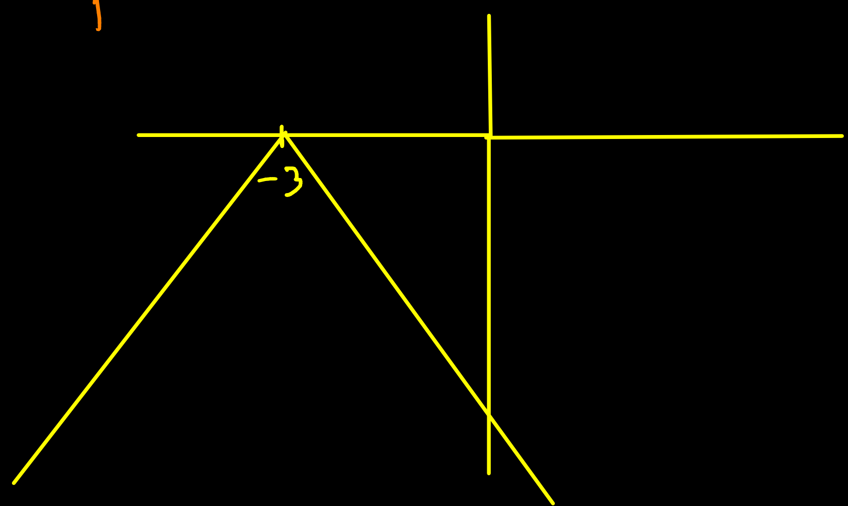
$\Rightarrow h(x) = 2(x+3) \wedge h(y) = 2(y+3)$

Obs: Si f es estrictamente creciente, entonces f es creciente

$\therefore \quad x < y \Rightarrow h(x) < h(y).$

$\therefore$ h es estrictamente creciente en $]-\infty, -3]$.

Ejercicio: Muestre que h es decreciente en $[-3, +\infty[$.



Def: •) Decimos que una función $f: A \to B$ es positiva si $\forall x \in A$ se cumple $f(x) > 0$.

Equivalentemente, f es positiva si y sólo si $\operatorname{Im}(f) \subseteq \,]0, +\infty[$

•) Decimos que f es negativa si $\forall x \in A: f(x) < 0$.

Análogamente, f es negativa si y sólo si $\operatorname{Im}(f) \subseteq \,]-\infty, 0[$.

Obs: Las funciones positivas son aquellas cuya gráfica está por sobre el eje horizontal.

NEGATIVA

DEBAJO

Una de las tantas preguntas interesantes de una función son sus intervalos de positividad o equivalente, los signos de una función.

Def: Decimos que una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par si

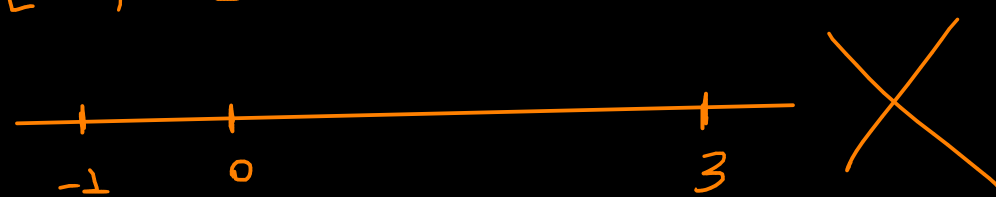
$$\longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = f(x).$$

Decimos que una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar si

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = -f(x).$$

En el caso en que el dominio no sea $\mathbb{R}$ también se puede hablar de paridad. Sin embargo, aquel dominio debe ser simétrico respecto del cero.

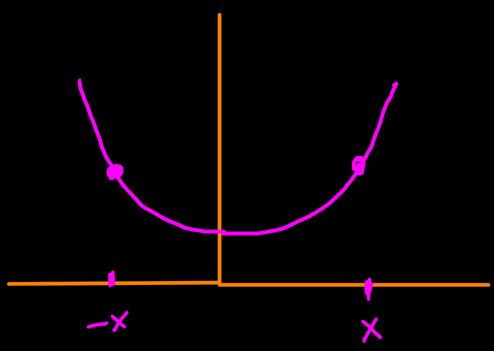
Por (no) ejemplo: $[-1, 3]$ no es un intervalo simétrico respecto del cero,



Ejemplos: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

Afirmación: f es par.

Dem: Sea $x\in\mathbb{R}$. Entonces



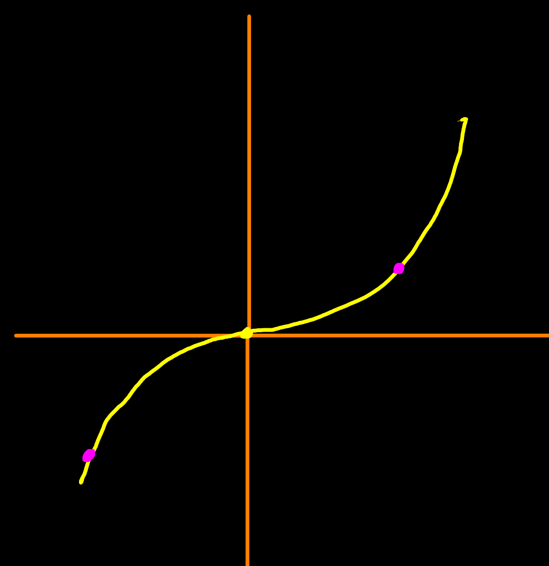
$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^2+1 = (-1)^2\cdot x^2+1 \\
&= x^2+1 \\
&= f(x) \quad //
\end{aligned}
$$

$\therefore$ f es par.

Ejemplo: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$

Afirmación: g es impar:

Sea $x\in\mathbb{R}$,



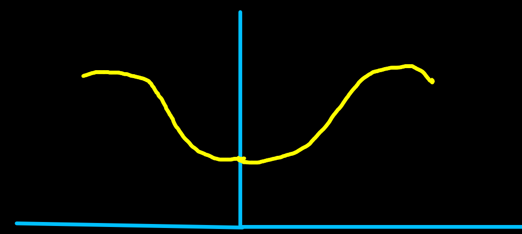
$$
\begin{aligned}
g(-x) &= (-x)^3 \\
&= -x^3 \\
&= -g(x).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ g es impar.

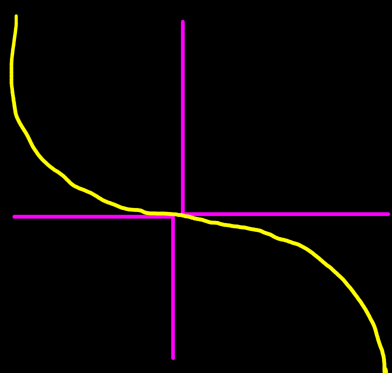
En general: $h(x)=x^n$

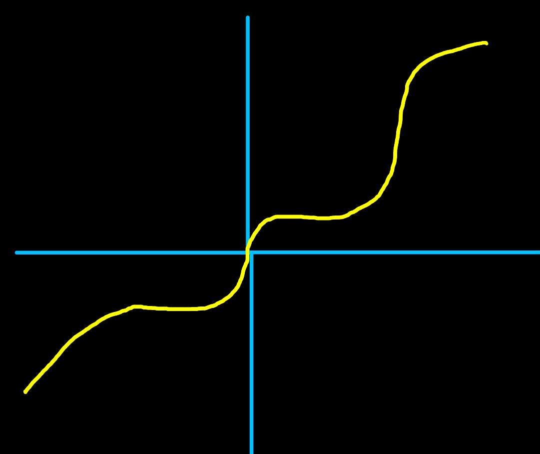
- Si n es par, h es par
- Si n es impar, h es impar.

__Observación geométrica:__ i) Una función es par si su gráfica es simétrica respecto del eje vertical.



ii) Una función es impar si su gráfica es simétrica respecto del origen (al $(0,0)$)





__Funciones racionales:__ (De primer grado o simples)

Una función se dice racional (simple) si su regla de asignación es de la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad-bc \neq 0 \wedge c \neq 0$$

($c \neq 0$ y a y $b \neq 0$ simultáneamente)

Ejemplos: •) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad (a=0,\ b=1,\ c=1,\ d=0)$

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ es una función racional.

$(a=1,\ b=2,\ c=2,\ d=4)$

•) $g(x) = \dfrac{x+2}{2x+4}$ NO es una función racional.

$= \dfrac{1}{2}$ $\quad (ad - bc = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 0)$

Forma canónica: Vamos a encontrar (y definir) una forma canónica para las funciones racionales:

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{3x-1}{4-x} = \dfrac{3x-1}{-x+4}$. Hacemos división de polinomios:

$$3x - 1 : -x + 4 = -3$$

$$\underline{-(3x - 12)}$$

$$11$$

ó. $3x - 1 = -3(-x+4) + 11$ $\quad / \quad \dfrac{1}{-x+4} = \dfrac{1}{4-x}$

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{4-x} = \frac{-3(-x+4)}{-x+4} + \frac{11}{-x+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -3 + \frac{-11}{x-4}} \longrightarrow \text{Forma canónica}$$

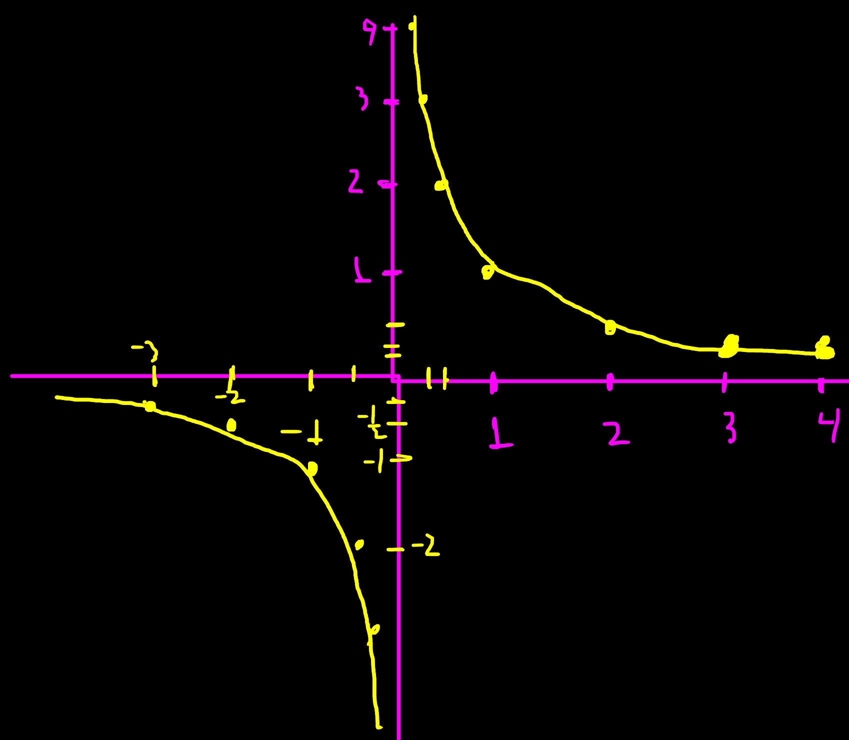
Def: Una función racional simple está en su forma canónica si

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k.$$

Gráfica de funciones racionales simples

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (a=1,\ h=0,\ k=0)$, $\quad x \neq 0$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



x	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{4}$	4

Def: Sea $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ una función racional simple.

•) La recta vertical $x = h$ se dice la asíntota vertical de f

c) La recta horizontal $y = k$ se dice la asíntota horizontal de f.

Ejemplo: Grafique $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - 3$

Sol: Asíntota horizontal: $y = -3$

" vertical: $x = -2$