Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
Primer semestre de 2021

Solución Taller de ayudantía 8
Funciones
28/05/2020

En este taller seguiremos trabajando algunos conceptos vistos de funciones y agregaremos otros nuevos, como la construcción de nuevas funciones a partir de otras, estableciendo su dominio, codominio y regla de asignación, y la construcción de la función inversa de una función biyectiva. Además, expresaremos ciertas funciones en su forma canónica para establecer propiedades de ella y así relacionarlas con su representación gráfica. También resolveremos problemas en situaciones contextualizadas

Objetivos:

- Determinar el conjunto imagen de una función e indicar si una función es acotada.
- Esbozar el gráfico de una funcion cuadrática y racional, utilizando su forma canónica.
- A partir de ciertas funciones, definir otras funciones mediante operaciones entre ellas.
- Deducir e interpretar información de un problema contextualizado aplicando el modelo racional.
- Decidir si una función es invertible y encontrar su función inversa.
- Comparar el gráfico de una función con el de su inversa.

Ejercicios Propuestos

1. Considere las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x + 1$, y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^2 - 1$.

   a) Determine las funciones $f + g$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$.

   Solución:

   - Para encontrar $f + g$, en primera lugar notemos que su dominio y codominio, están dados por

   $$\text{dom}(f+g) = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Cod}(f+g) = \mathbb{R}$$

   Además,

   $$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (2x+1) + (x^2 - 1)\\ &= x^2 + 2x\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y su regla de asignación está dada por $(f + g)(x) = x^2 + 2x$.

- Para encontrar $f \cdot g$, notemos que su dominio y codominio están dados por

$$\mathrm{Dom}(fg) = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Cod}(f \cdot g) = \mathbb{R}$$

Además,

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (2x+1) \cdot (x^2 - 1) \\ &= 2x^3 - 2x + x^2 - 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $fg : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ y su regla de asignación está dada por

$$(f \cdot g)(x) = 2x^3 - 2x + x^2 - 1\,.$$

- Para encontrar $\dfrac{f}{g}$, pasamos a describir su dominio y codominio, los cuales están dados

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathrm{Dom}(g) | g(x) = 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\end{aligned}$$

y

$$\mathrm{Cod}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}$$

Además,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x+1)}{(x^2-1)} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

Por lo tanto, $\left(\dfrac{f}{g}\right) : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ y su regla de asignación está dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

b) Determine el dominio de la función $f \circ g$ y calcule $(f \circ g)(x)$. ¿Existe $f(g(3))$?

Solución: Notemos que $\mathrm{Cod}(f \circ g) = \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f \circ g) &= \{x \in \mathrm{Dom}(g) | g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= 2(x^2 - 1) + 1 \\ &= 2x^2 - 2 + 1 \\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

Notemos que $g(3) = 8$ y $f(8) = 17$, por lo cual $(f \circ g)(3) = 17$. Otra forma de llegar al mismo valor es reemplazar en la regla de asignación calculada, en efecto, $(f \circ g)(3) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$.

c) Determine el dominio de la función $g \circ f$ y calcule $(g \circ f)(x)$. ¿Existe $g(f(2))$?

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}\text{Dom}(g \circ f) &= \{x \in \text{Dom}(f) | f(x) \in \text{Dom}(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x + 1) \\ &= (2x + 1)^2 - 1 \\ &= 4x^2 + 4x\end{aligned}$$

Notemos que $f(2) = 5$ y $g(5) = 24$, es decir, $(g \circ f)(2) = 24$.

d) Discuta si las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son iguales.

Solución: Note que $f \circ g \neq g \circ f$, A pesar de tener dominio y codomio iguales, esencialmente la diferencia radica en que sus reglas de asignación no son equivalentes. Es decir,

$$\begin{aligned}f(g(x)) &\neq g(f(x)) \\ 2x^2 - 1 &\neq 4x^2 + 4x,\end{aligned}$$

2. Un determinado fármaco que regula la temperatura corporal se inyecta por vía muscular. Su efecto, en horas, depende de la dosis x, en milígramos, según el modelo $E(x) = \dfrac{74x}{8x+3}$, con $x \geq 0$.

   a) Exprese el modelo en su forma canónica y represéntelo gráficamente.

   Solución: Notemos que para $x \neq -\dfrac{3}{8}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{74x}{8x+3} &= \frac{74}{8} \cdot \left(\frac{x}{x+\frac{3}{8}} \right) = \frac{37}{4} \cdot \left(\frac{x+\frac{3}{8}-\frac{3}{8}}{x+\frac{3}{8}} \right) \\
&= \frac{37}{4} \cdot \left(\frac{x+\frac{3}{8}}{x+\frac{3}{8}} - \frac{\frac{3}{8}}{x+\frac{3}{8}} \right) = \frac{37}{4} \cdot \left(1 - \frac{\frac{3}{8}}{x+\frac{3}{8}} \right) \\
&= \frac{37}{4} - \frac{\frac{111}{32}}{x+\frac{3}{8}}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto,

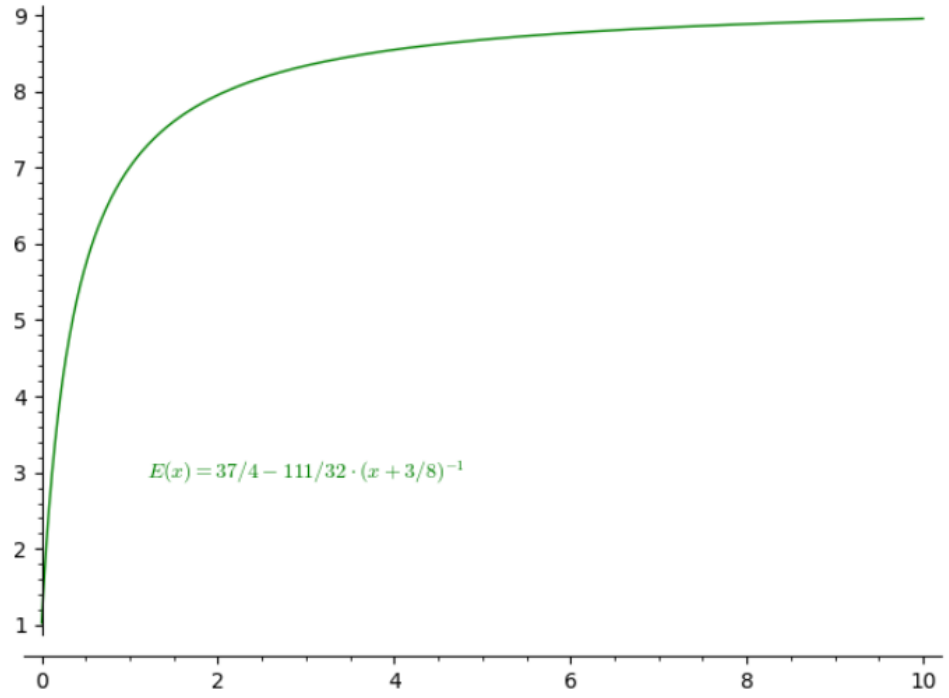
$$E(x) = \frac{37}{4} - \frac{\frac{111}{32}}{x+\frac{3}{8}}$$

   Ahora, si la forma canónica de la función la denotamos por

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k,$$

   En particular, para nuestro modelo $a = -\dfrac{111}{32}$, $h = -\dfrac{3}{8}$ y $k = \dfrac{37}{4}$.

Además, la gráfica está dada por



b) ¿Qué rango de dosis se requiere para que el fármaco tenga efecto entre 4 y 8 horas?

Solución: Como el valor $a < 0$ en la forma canónica de la función racional, se tiene que ésta será creciente en su dominio. Además,

$$
\begin{aligned}
4 \leq E(x) \leq 8 \quad &\iff \quad 4 \leq \frac{37}{4} - \frac{\frac{111}{32}}{(x+\frac{3}{8})} \leq 8 && / -\frac{37}{4} \\
&\iff \quad -\frac{21}{4} \leq -\frac{\frac{111}{32}}{(x+\frac{3}{8})} \leq -\frac{5}{4} && / \cdot -\frac{32}{111} \\
&\iff \quad \frac{56}{37} \geq \frac{1}{x+\frac{3}{8}} \geq \frac{40}{111} && /(\cdot)^{-1} \\
&\iff \quad \frac{37}{56} \leq x + \frac{3}{8} \leq \frac{111}{40} && / -\frac{3}{8} \\
&\iff \quad \frac{2}{7} \leq x \leq \frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\frac{2}{7} \leq x \leq \frac{12}{5} \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}286 \leq x \leq 2{,}4$$

De manera tal que, para que el fármaco actúe entre 4 y 8 horas se requieren entre 0,286 y 2,4 miligramos.

c) ¿Diría usted que a medida y que aumenta la dosis, aumenta el tiempo de efectividad del fármaco?

Solución: Notemos que para $x > 0$ la función $E(x)$ esta acotada por la recta horizontal $x = \dfrac{37}{4}$, por ende el efecto del medicamento solo tendría como límite de duración $9,25 = \dfrac{37}{4}$ horas.

3. Considere la función cuadrática $f\colon]-\infty, 1] \to [4, +\infty[$ dada por la fórmula

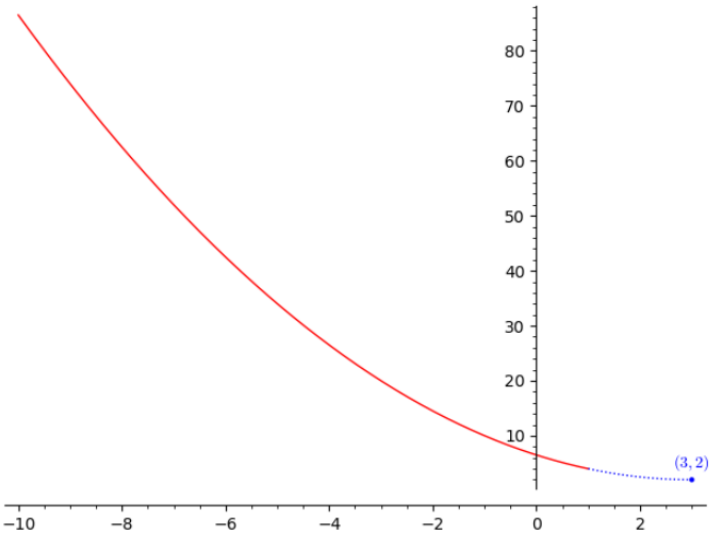
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{13}{2}.$$

a) Encuentre la forma canónica de f y úsela para graficar esta función.

Solución: En primer lugar completamos cuadrados para llevar la expresión a su forma canónica, en efecto

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{13}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 13\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + 13\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x-3)^2 + 4\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2\,. \end{aligned}$$

Notemos que f corresponde a una función cuadrática con $a = \dfrac{1}{2}$, $h = 3$ y $k = 2$, por lo cual, su gráfica corresponde a una parábola cóncava hacia arriba (convexa) cuyo vértice se ubica en el punto $(h, k) = (3, 2)$. Su gráfica está dada por



b) Encuentre el conjunto imagen $\mathrm{Im}(f)$ de f.

Solución: Debemos determinar el conjunto

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{y \in [4,\infty) \mid \exists x \in (-\infty, 1] \colon y = f(x)\} \\ &= \{y \in [4,\infty) \mid \exists x \in (-\infty, 1] \colon y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2\}\,.\end{aligned}$$

Ahora, notemos que para todo $x \in]-\infty, 3]$, se tiene

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 \qquad &\iff \qquad 2(y-2) = (x-3)^2 \\ &\iff \qquad |x-3| = \sqrt{2(y-2)} \\ &\implies \qquad x = 3 - \sqrt{2(y-2)}. \end{aligned}$$

Observe que podemos asegurar la existencia de tal x para todos los $y \geq 2$. Sin embargo, notemos que en particular, para todo $x \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{2(y-2)} \leq 1 \qquad &\iff \qquad \sqrt{2(y-2)} \geq 2 \\ &\iff \qquad \sqrt{2(y-2)} \geq 2 \\ &\iff \qquad 2(y-2) \geq 4 \\ &\iff \qquad y - 2 \geq 2 \\ &\iff \qquad y \geq 4. \end{aligned}$$

Además, para todo $x \leq 1$, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2}((3 - \sqrt{2(y-2)}) - 3)^2 + 2 = y\,.$$

Por lo tanto, el conjunto imagen de la función corresponde a

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in [4,\infty) \mid \exists x \in (-\infty, 1] \colon y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2\} = [4, \infty].$$

c) ¿Tiene f máximo y/o mínimo?

Solución: Dado que la gráfica de la función corresponde a una parábola cóncava hacia arriba (convexa) cuyo vértice se ubica en el punto $(h, k) = (3, 2)$. Aparentemente, en $x = 3$ hay un mínimo local de la función el cual vale $f(3) = 2$. Sin embargo, el valor $x = 3$ no pertenece al

dominio de la función. Por lo tanto, la función f no alcanza su mínimo en el vértice.

Además, notemos que para todo $x \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} x \leq 1 \quad &\iff \quad x-3 \leq -2 \\ &\iff \quad (x-3)^2 \geq 4 \\ &\iff \quad \frac{1}{2}(x-3)^2 \geq 2 \\ &\iff \quad \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 \geq 4 \\ &\iff \quad f(x) \geq 4 \end{aligned}$$

Es decir, en $x = 1$ hay un mínimo de la función y éste está dado por $f(1) = 4$. Por lo tanto, la función tiene un mínimo en $(1, 4)$. Otra forma de concluir lo mismo es notar que el mínimo del conjunto $\text{Im}(f) = [4, \infty)$ es $y = 4$ cuya preimagen es $x = 1$.

d) Verifique que la función f es biyectiva.

Solución: Notemos que f es inyectiva para todo $x \in]-\infty, 1]$. En efecto, sean $x_1, x_2 \in]-\infty, 1]$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, es decir,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\iff \quad \frac{1}{2}(x_1-3)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x_2-3)^2 + 2 && / -2 \\ &\iff \quad \frac{1}{2}(x_1-3)^2 = \frac{1}{2}(x_2-3)^2 && / \cdot 2 \\ &\iff \quad (x_1-3)^2 = (x_2-3)^2 && /\surd \\ &\iff \quad |x_1-3| = |x_2-3|. \end{aligned}$$

Como $x_1, x_2 \in]-\infty, 1]$ se tiene que ambos valores absolutos son negativos, por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\implies \quad -(x_1-3) = -(x_2-3) && / \cdot -1 \\ &\iff \quad x_1 - 3 = x_2 - 3 && / +3 \\ &\iff \quad x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $x_1, x_2 \in]-\infty, 1]$ se tiene que

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Además, la función f es sobreyectiva, pues $f(]-\infty, 1]) = [4, \infty[$ y $\text{Im}(f) = \text{cod}(f)$. Es decir, para todo $y \in [4, \infty[$, existe $x \in]-\infty, 1]$ tal que $y = f(x)$. Finalmente, dado que f es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva.

e) Encuentre la función inversa f^{-1} de f, y grafíquela.

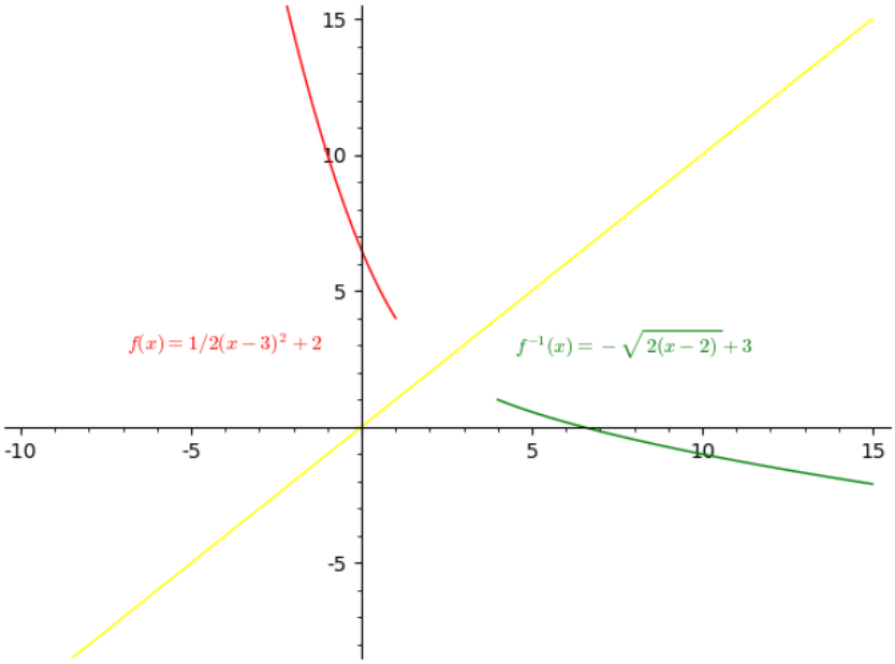
Solución: En virtud de lo anterior la función $f\colon]-\infty, 1] \to [4, \infty[$ es invertible pues es biyectiva. Además, la función inversa está dada por $f^{-1}\colon [4, \infty[\to]-\infty, 1]$ y para determinar su regla de asignación, considere $y \in [4, \infty[$, luego

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 \\ &\iff 2(y-2) = (x-3)^2 \\ &\iff -\sqrt{2(y-2)} = x - 3 \\ &\iff -\sqrt{2(y-2)} + 3 = x. \end{aligned}$$

pues $x < 1$. Por lo tanto, se concluye que la regla de asignación para la función inversa de f es

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{2(x-2)}.$$

Y su gráfica está representada por



"¿Por qué son hermosos los números? Es como preguntar por qué es hermosa la Novena Sinfonía de Beethoven. Si usted no ve por qué, nadie podrá decírselo. Sé que los números son hermosos. Si no son hermosos, nada lo es." – Paul Erdős