Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
Primer semestre de 2021

Solución Taller de ayudantía 9
Funciones inversas y trigonometría

04/06/2021

En este taller buscaremos condiciones suficientes para determinar la función inversa de un modelo cuadrático, graficaremos ambas funciones y observaremos la simetría existente entre ellas. Por otro lado, estudiaremos el círculo unitario y a partir de éste calcularemos algunos valores de las funciones seno y coseno. Para finalizar, resolveremos algunas ecuaciones trigonométricas sencillas.

Objetivos:

- Decidir si una función es invertible y encontrar su función inversa.
- Comparar el gráfico de una función con el de su inversa.
- Identificar ángulos notables en la circunferencia unitaria y sus respectivas evaluaciones bajo las funciones trigonométricas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas sencillas.

Ejercicios Propuestos

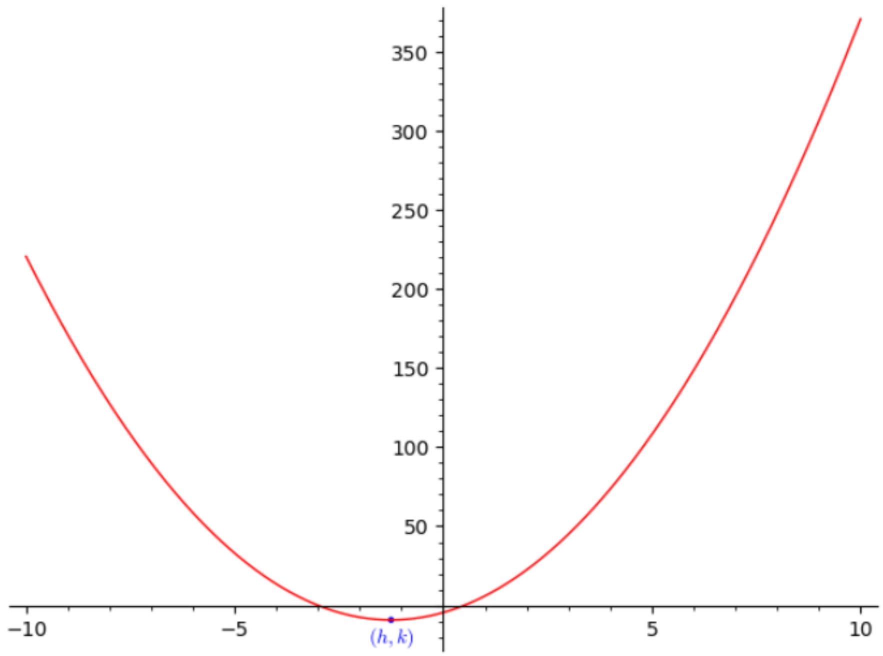
1. Considere $f :]-\infty, a] \longrightarrow \left[-\dfrac{147}{16}, \infty\right[$ tal que $f(x) = 3x^2 + \dfrac{15}{2}x - \dfrac{9}{2}$,

   a) Determine el valor de la constante a para que la función f sea biyectiva.

   Solución: En primer lugar escribiremos la función f en su forma canónica

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(x^2 + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) \\ &= 3\left(x^2 + \frac{5}{2} + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right) \\ &= 3\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right) \\ &= 3\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{147}{16}. \end{aligned}$$

Notemos la gráfica de f corresponde a una parábola cóncava hacia arriba (convexa) cuyo vértice se ubica en el punto $(h,k) = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{147}{16}\right)$. Su gráfica está dada por



A partir de la gráfica podemos notar que f es inyectiva para $x \in]-\infty, \frac{5}{4}\Big]$. En efecto, consideremos $x_1, x_2 \in]-\infty, -\frac{5}{4}\Big]$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, es decir,

$$
\begin{aligned}
3\left(x_1 + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{147}{16} = 3\left(x_2 + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{147}{16} \qquad &\iff \qquad 3\left(x_1 + \frac{5}{4}\right)^2 = 3\left(x_2 + \frac{5}{4}\right)^2 \\
&\iff \qquad \left(x_1 + \frac{5}{4}\right)^2 = \left(x_2 + \frac{5}{4}\right)^2 \\
&\iff \qquad \left|x_1 + \frac{5}{4}\right| = \left|x_2 + \frac{5}{4}\right|
\end{aligned}
$$

Como $x_1, x_2 \in]-\infty, -\frac{5}{4}\Big]$ se tiene que ambos valores absolutos son negativos, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
-\left(x_1 + \frac{5}{4}\right) = -\left(x_2 + \frac{5}{4}\right) \qquad &\iff \qquad x_1 + \frac{5}{4} = x_2 + \frac{5}{4} \\
&\iff \qquad x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto para todo $x_1, x_2 \in]-\infty, -\frac{5}{4}\Big]$ se tiene que

$$
f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.
$$

Luego, considerando $a = -\dfrac{5}{4}$ la función $f : (-\infty, -\dfrac{5}{4}\Big] \to \Big[-\dfrac{147}{16}, \infty\Big[$ cuya regla de asignación está dada por $f(x) = 3\left(x + \dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{147}{16}$ es inyectiva.

Además, notemos que la imagen de la función corresponde al conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{147}{16}, \infty\right] = \mathrm{Cod}(f).$$

Por lo tanto, en virtud de la caracterización de funciones sobreyectivas, se cumple la sobreyectividad para la función f.

Finalmente, considerando $a = -\dfrac{5}{4}$ nos aseguramos que se cumplan ambas condiciones (inyectividad y sobreyectividad) lo que implica la biyectividad de f y la eventual invertibilidad.

b) Asumiendo el valor de a, encontrado en el ítem anterior, determine la función inversa de f (llame a esa función f^{-1}) escribiendo explícitamente su dominio, codominio y regla de asignación.

Solución: En virtud de lo anterior, dado que f es biyectiva, se tiene la función invertible

$$f : \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right] \to \left[-\frac{147}{16}, \infty\right[.$$

De donde podemos concluir que

$$f^{-1} : \left[-\frac{147}{16}, \infty\right[\to \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right],$$

cuyas regla de asignación satisface que para $y \in \left[-\dfrac{147}{16}, \infty\right[$ se tiene

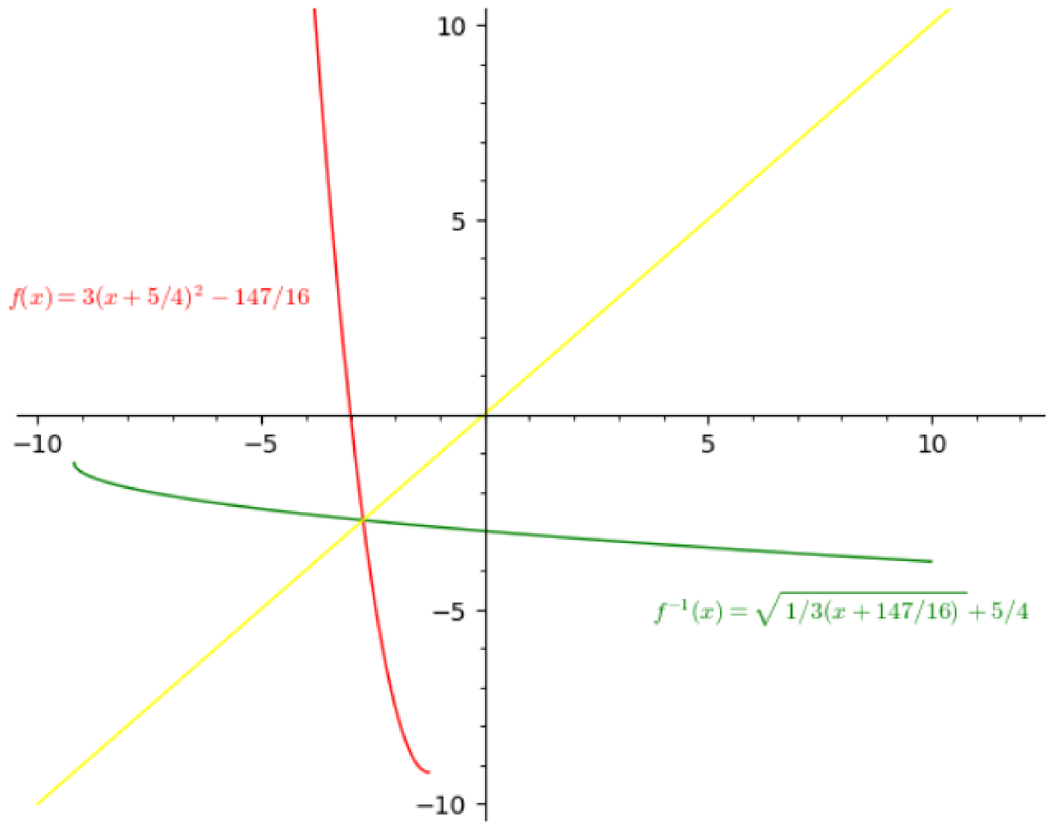
$$\begin{aligned} y = f(x) \qquad &\iff \qquad y = 3\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{147}{16} \\ &\iff \qquad \frac{1}{3}\left(y + \frac{147}{16}\right) = \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 \\ &\iff \qquad -\sqrt{\frac{1}{3}\left(y + \frac{147}{16}\right)} = x + \frac{5}{4} \\ &\iff \qquad -\sqrt{\frac{1}{3}\left(y + \frac{147}{16}\right)} - \frac{5}{4} = x. \end{aligned}$$

pues $x < -\dfrac{5}{4}$. Por lo tanto, se concluye que la regla de asignación para la función inversa de f es

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}\left(x + \frac{147}{16}\right)} - \frac{5}{4}.$$

c) Esboce el gráfico de la función f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano.

Solución: Se adjunta las gráfica de ambas funciones



2. A partir del círculo unitario, calcule los valores de las siguientes expresiones:

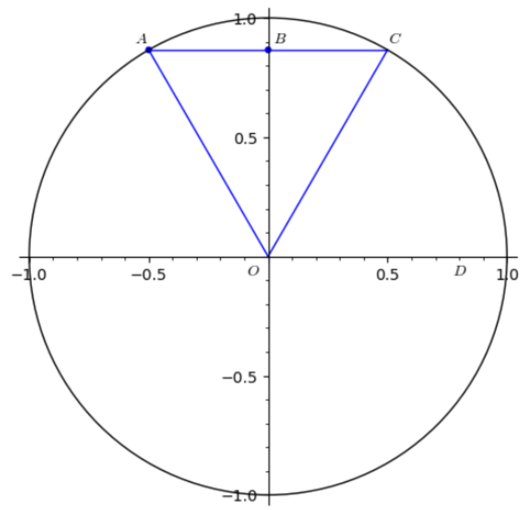
- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
- $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$
- $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$
- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$
- $\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$.
- $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$
- $\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$
- $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Solución:

- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

- $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Para determinar el valor en cuestión, consideremos la siguiente figura, donde $\angle DOA = \dfrac{2\pi}{3}$, por lo cual $\angle AOB = \dfrac{\pi}{6}$ y $\angle OAB = \dfrac{\pi}{3}$. Luego, trazamos el punto C de tal forma que el triángulo $\triangle AOC$ es equilátero y $\overline{OB}$ es altura, luego transversal de gravedad, es decir $\overline{AB} = \dfrac{1}{2}$ y dado que $\overline{AO}$ es una radio, por el Teorema de Pitágoras se tiene



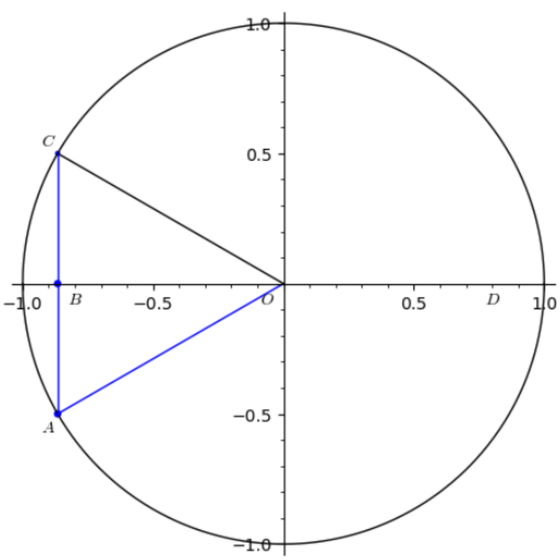
$$\overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 \iff \overline{OB}^2 = \frac{3}{4} \iff \overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que las coordenadas del punto A son $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Finalmente,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

- $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$



Para determinar los valores en este caso, consideremos la siguiente figura, donde $\angle DOA = \dfrac{7\pi}{6}$, por lo cual $\angle AOB = \dfrac{\pi}{6}$ y $\angle OAB = \dfrac{\pi}{3}$. Luego, trazamos el punto C de tal forma que el triángulo $\triangle AOC$ es equilátero y $\overline{OB}$ es altura, luego transversal de gravedad, es decir $\overline{AB} = \dfrac{1}{2}$ y dado que $\overline{AO}$ es una radio, por el Teorema de Pitágoras se tiene

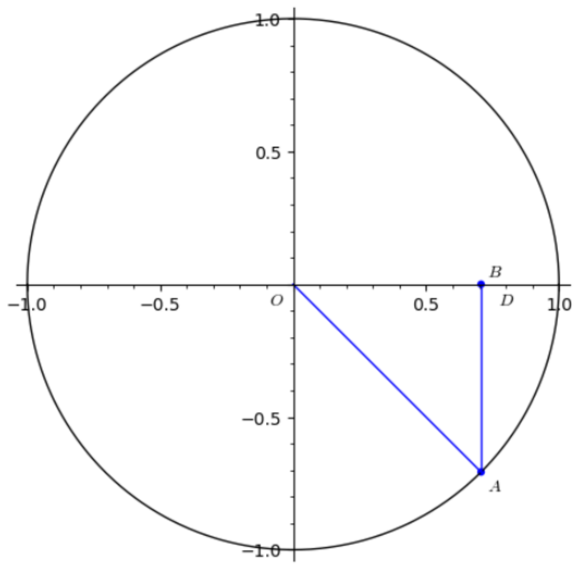
$$\overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 \iff \overline{OB}^2 = \frac{3}{4} \iff \overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que las coordenadas del punto A son $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Finalmente,

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

- $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
- $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Para determinar los valores en este caso, consideremos la siguiente figura, donde $\angle DOA = \frac{7\pi}{4}$, por lo cual $\angle AOB = \frac{\pi}{4} = \angle OAB$. Luego, dado que tenemos ángulos basales congruentes, el triángulo $\triangle AOB$ es isósceles



$$\overline{OB} = \overline{AB}$$

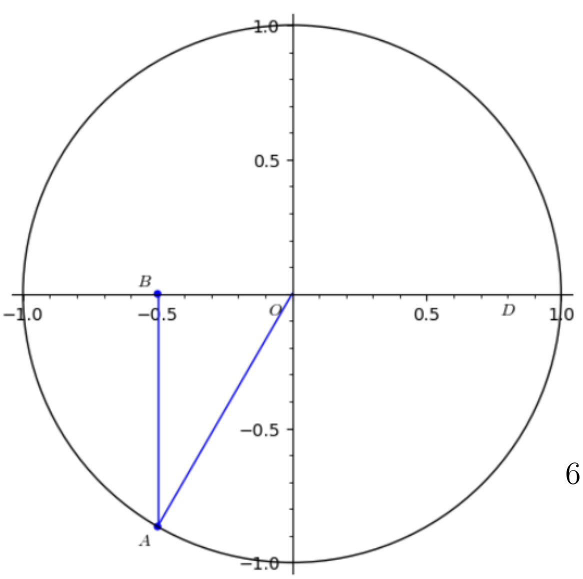
y dado que $\overline{AO}$ es un radio, por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 \qquad &\iff \qquad \overline{OB}^2 = \frac{1}{2} \\ &\iff \qquad \overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Por lo que las coordenadas del punto A son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Finalmente,

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- $\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
- $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$



Para determinar el valor involucrado consideremos la siguiente figura, donde $\angle DOA = -\frac{2\pi}{3}$, por lo cual $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ y $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$. Luego, por lo realizado anteriormente concluimos que

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \overline{OB} = \frac{1}{2}$$

De esta manera, las coordenadas del punto A están dadas por $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Finalmente,

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

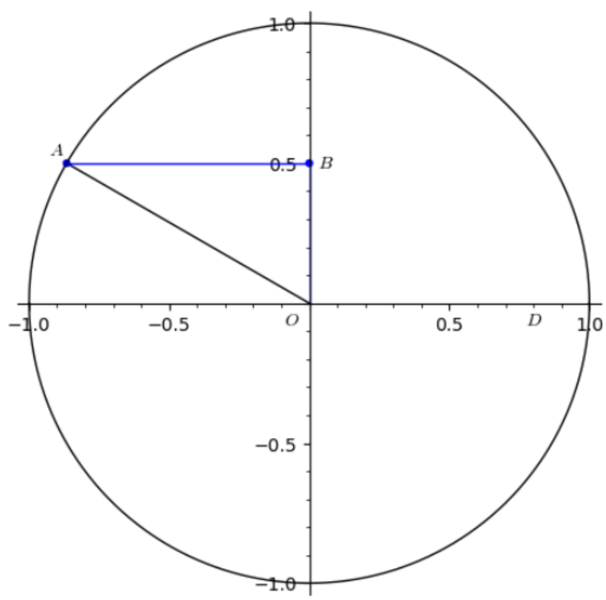
- $\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$
- $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

Para este caso, notemos que en la circunferencia el punto correspondiente al ángulo $-\frac{4\pi}{3}$ coincide con el punto asociado al ángulo $\frac{2\pi}{3}$. Por lo tanto,

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

- $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
- $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

Para determinar los valores solicitados, consideremos la siguiente figura, donde $\angle DOA = -\frac{7\pi}{6}$, por lo cual $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ y $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$. de tal forma que



$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \overline{OB} = \frac{1}{2}$$

Por lo que las coordenadas del punto A están dadas por $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

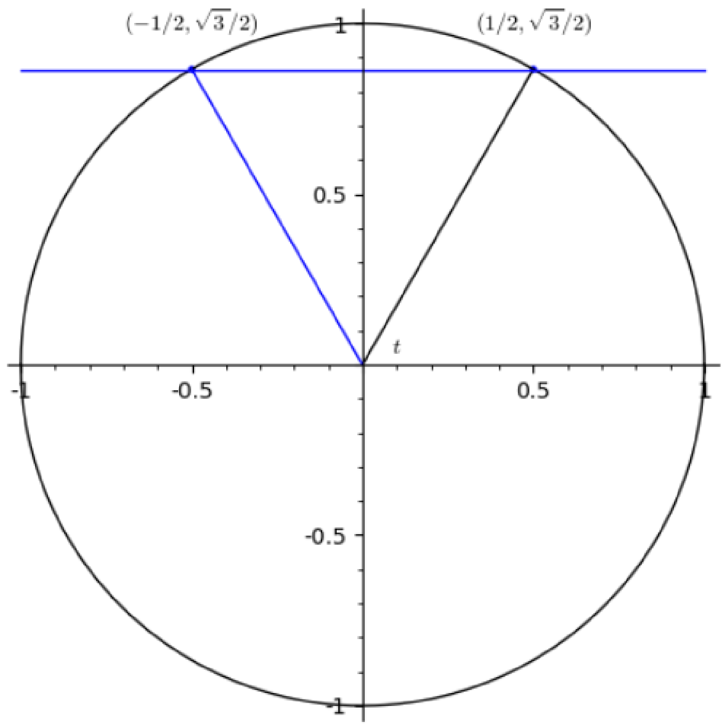
Finalmente,

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ .$$

3. Decida la veracidad de las siguientes proposiciones. Justifique cualquiera sea su respuesta.

   a) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que cumple con $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Solución: Por un lado, considerando la expresión $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, la cual podemos visualizar de la siguiente manera: estamos interesades en encontrar los ángulos cuya proyección sobre el eje Y sea exactamente $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ver figura)



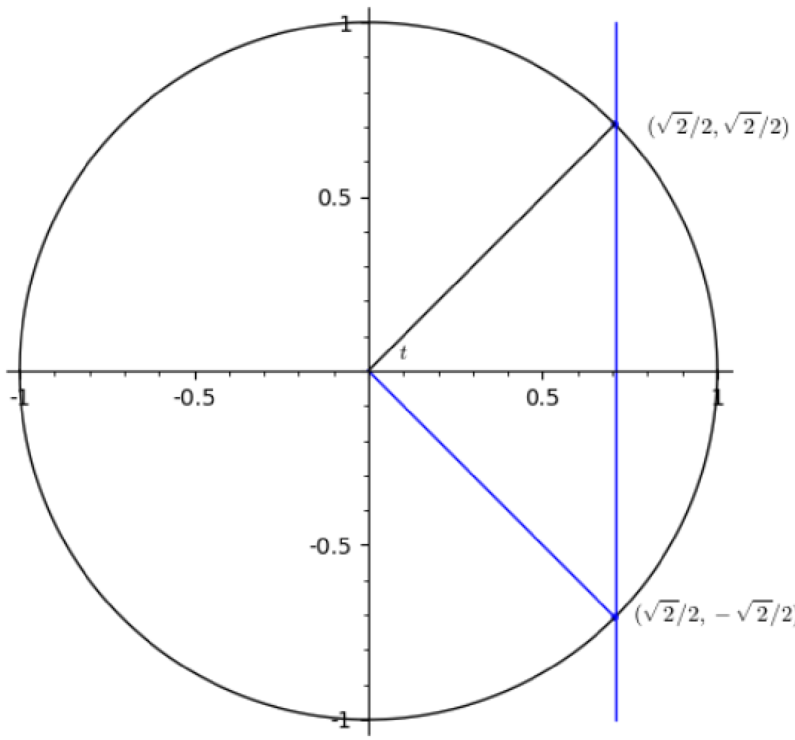
   Ahora, consideremos los puntos $A\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(0,0)$ y $D\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Formemos el triángulo $\triangle ABC$ de vértices en los puntos anteriores A, B y C. Luego, notemos que corresponde a un triángulo equilátero, en efecto como $\overline{AC} = \overline{CB} = 1$ (son radios) el tríangulo es al menos isósceles y como $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{CD}$ es altura luego bisectriz y se tiene que el ángulo $\angle BCD = \dfrac{\pi}{6}$. Por ende, el ángulo $\angle ACB = \dfrac{\pi}{3}$. Además, como $\overline{BC}$ es paralela al eje X se concluye que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Además, considerando todas las repeticiones de la circunferencia se tiene que el conjunto de ángulos que cumplen lo anterior es

$$S_1 = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2m\pi \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por otro lado, si consideramos la expresión $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, estamos interesades en encontrar los ángulos cuya proyección en el eje X es exactamente $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Considere la siguiente visualización:



Notemos, que tenemos triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa igual a 1, además, sus catetos son iguales a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así, considerando las todas las repeticiones se tiene el que conjunto de ángulos que cumplen lo anterior está dado por

$$S_2 = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + 2m\pi \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Entonces, si existe algún α que pertenezca a S_1 y S_2, éste cumpliría que

$$\alpha \in \left[\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi \,|\, \ell \in \mathbb{Z} \right\} \right] \cap \left[\left\{ -\frac{\pi}{4} + 2m\pi \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + 2n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z} \right\} \right]$$

Donde,

- Si para algún $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y
  - Si $\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, se tendría

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} + 2k\pi &= -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} &= 2\pi(n-k) \\ \frac{7}{12} &= 2(n-k) \\ \frac{7}{24} &= (n-k). \end{aligned}$$

    Pero, $n - k \in \mathbb{Z}$, por lo cual llegamos a una contradicción. Por lo tanto, en este caso, no existe α.

  - Si $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, se tendría

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} + 2k\pi &= \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} &= 2\pi(n-k) \\ \frac{1}{12} &= 2(n-k) \\ \frac{1}{24} &= (n-k). \end{aligned}$$

    Pero, $n - k \in \mathbb{Z}$, por lo cual llegamos a la misma contradicción. Por lo tanto, en este caso tampoco existe α.

- Si para algún $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ y
  - Si $\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, se tendría

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi &= -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} &= 2\pi(n-k) \\ \frac{11}{12} &= 2(n-k) \\ \frac{11}{24} &= (n-k). \end{aligned}$$

    Pero, $n - k \in \mathbb{Z}$, por lo cual llegamos a la misma contradicción.

- Si $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, se tendría

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi &= \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} &= 2\pi(n-k) \\ \frac{5}{12} &= 2(n-k) \\ \frac{5}{24} &= (n-k). \end{aligned}$$

  Pero, $n - k \in \mathbb{Z}$, por lo cual llegamos a la misma contradicción. Por lo tanto, en este caso tampoco existe α.

Por consiguiente, a partir del análisis de casos anterior podemos concluir que

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

Finalmente, no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaciendo ambas condiciones.

Observación: Note que a partir de la identidad pitagórica se tiene que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

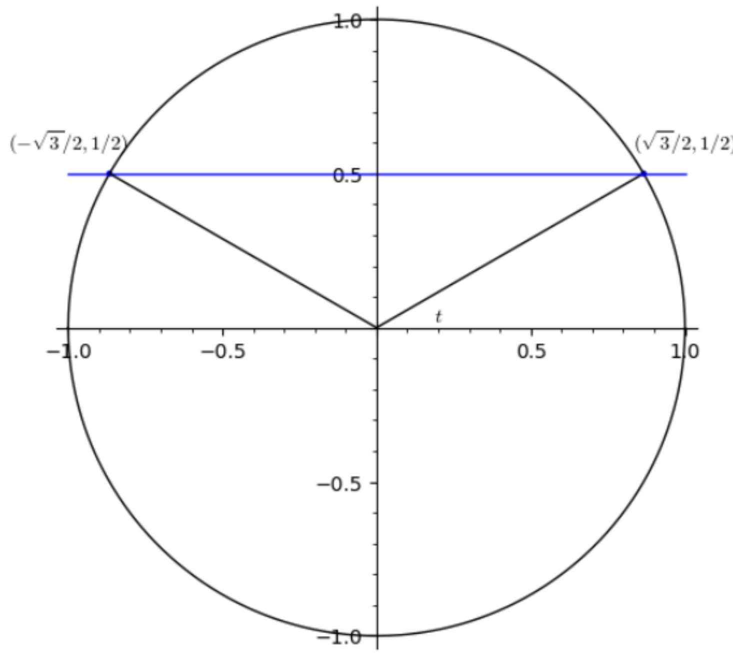
Luego, considerando ambas condiciones podemos notar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{5}{4} \neq 1 \end{aligned}$$

Como la identidad es para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, al no cumplirse en nuestro caso, basta para argumentar que la proposición es **falsa**

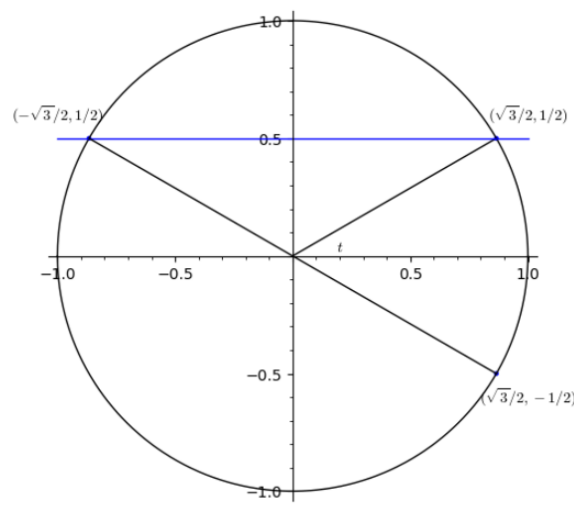
b) El conjunto solución de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{1}{2}$ es $\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \;\mid\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Solución: El conjunto buscado lo podemos visualizar de la siguiente manera: son todos los ángulos centrales de la circunferencia (y sus respectivas repeticiones) cuya proyección sobre el eje Y sea exactamente $\frac{1}{2}$ (ver figura)



Ahora, consideremos los puntos $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C(0,0)$ y $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Formemos el triángulo $\triangle ABC$ de vértices en los puntos anteriores A, B y C.

Luego, notemos que corresponde a un triángulo isósceles, $\overline{AC} = \overline{CB} = 1$ (son radios).
Por otro lado, trazamos el radio al punto $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, de tal forma que el triángulo $\triangle CEB$ es equilátero y $\angle BCE = \frac{\pi}{3}$.
Además, como $\overline{CD} \perp \overline{BE}$, $\overline{CD}$ es altura luego bisectriz y se tiene que el ángulo $\angle BCD = \frac{\pi}{6}$.
Por ende, el ángulo $\angle ABC = \frac{\pi}{6} = \angle BAC$.



Luego, como $\overline{BC}$ es paralela al eje X se concluye que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Además, considerando todas las repeticiones de la circunferencia se tiene que el conjunto de ángulos que cumplen lo anterior es

$$S_1 = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

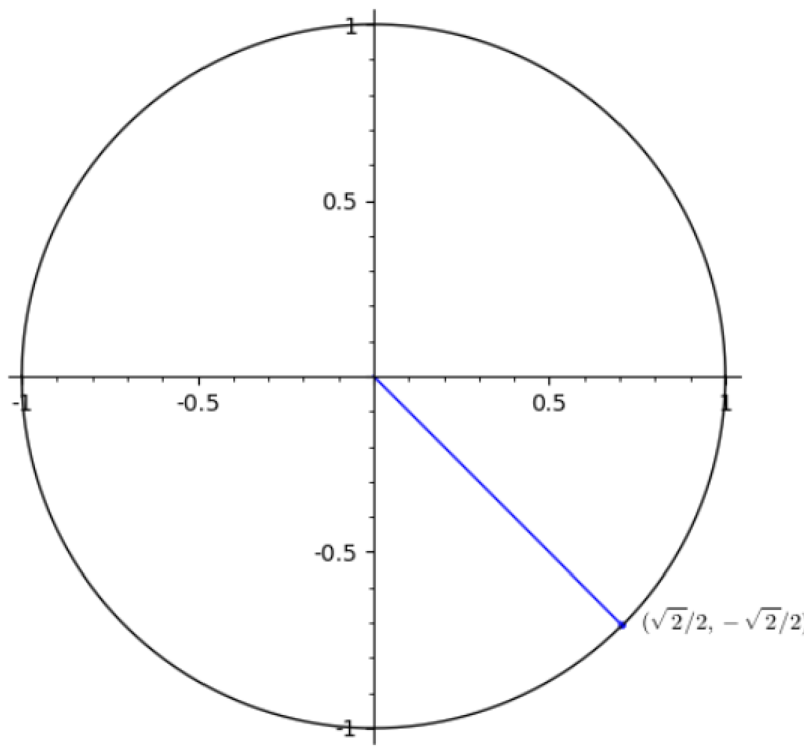
Finalmente, notemos que para $m = 0$, se tiene

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

Por lo cual, la afirmación es **falsa**.

c) La cantidad de $\alpha \in \mathbb{R}$ que cumplen con $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es infinita.

Solución: Note que ambas condiciones caracterizan el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, el cual pertenece a la circunferencia.



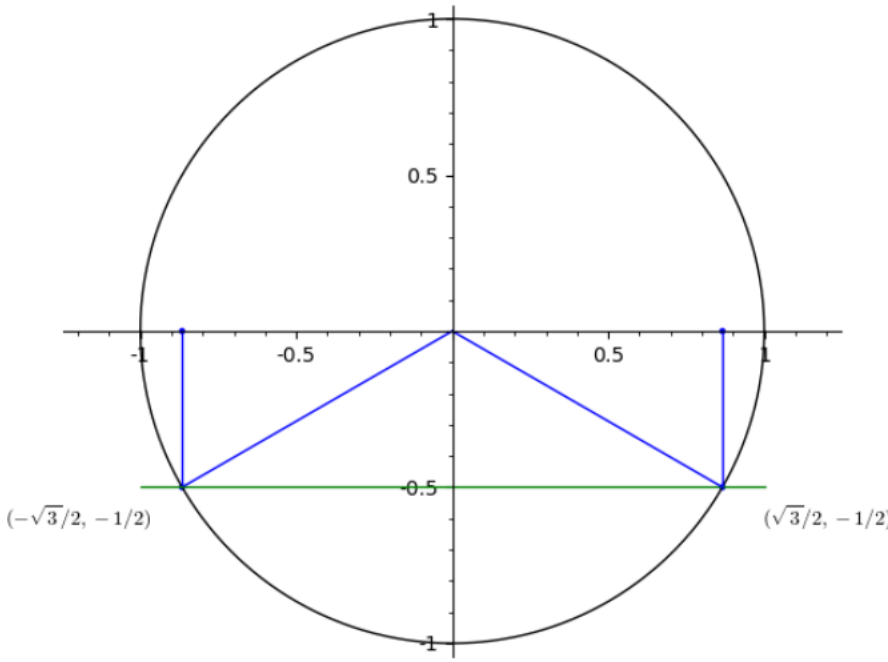
Además, notemos que esto ocurre cuando

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Por consiguiente, bajo estas condiciones tenemos tantos $\alpha \in \mathbb{R}$ como enteros hay. Por lo tanto la proposición es **verdadera**.

d) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $\operatorname{sen}(\alpha) = -\dfrac{1}{2}$, entonces el único valor para $\cos(\alpha)$ es $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Solución: Visualicemos la situación



Notemos que a simple vista el $\cos(\alpha)$ no está unívocamente determinado. De hecho, basta considerar $\alpha \in [0, 2\pi]$ tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2} \iff \alpha = \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{11\pi}{6}$$

y

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \neq \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo cual, la afirmación es **falsa**.

«Hay gente que dice: "nunca voy a necesitar las matemáticas"[...]. Incluso puede que tú nunca hayas aprendido algo de matemáticas. Ahí está el truco: vayas o no a usar las matemáticas en tu vida, el hecho de que hayas sido capaz de entenderlas deja una huella en tu cerebro que no existía antes, y esa huella es la que te convierte en un solucionador de problemas.»