Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 10

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, 3z, y)$ una transformación lineal. ¿Existe una base B en $M_{22}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B^B$ sea diagonal? De existir, encuentre B y $[T]_B^B$.

Solución. * Un comentario: La base ordenada B que buscamos corresponde a una base conformada por vectores propios de la transformación T. ¿Por qué? ; Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde v_1, v_2 y v_3 son vectores propios de T asociados a los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente. Armando la matriz representante tenemos

$$\begin{aligned} Tv_1 = \lambda_1 v_1 &\Rightarrow [Tv_1]_B = (\lambda_1\ 0\ 0) \\ Tv_2 = \lambda_2 v_2 &\Rightarrow [Tv_2]_B = (0\ \lambda_2\ 0) \\ Tv_3 = \lambda_3 v_3 &\Rightarrow [Tv_3]_B = (0\ 0\ \lambda_3) \\ &\Rightarrow [T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La cual corresponde a una matriz diagonal, donde los elementos de la diagonal son los valores propios antes mencionados. *

Dicho esto, sea $C = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica de R^3. Calculamos $[T]_C^C$;

$$\begin{aligned} Te_1 = (2, 0, 0) &\Rightarrow [Te_1]_C = (2\ 0\ 0) \\ Te_1 = (-1, 0, 1) &\Rightarrow [Te_2]_C = (-1\ 0\ 1) \\ Te_1 = (0, 3, 0) &\Rightarrow [Te_3]_C = (0\ 3\ 0) \\ &\Rightarrow [T]_C^C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Diagonalizamos la matriz A;

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3) \end{aligned}$$

Los ceros de $p(\lambda)$ corresponden a nuestros valores propios : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ y $\lambda_3 = -\sqrt{3}$. Procedemos a encontrar el subespacio propio para cada uno de estos valores propios;

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_1} &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I_3)v = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{(x,y,z) \mid y = 0, z = 0\ \} = \operatorname{gen}(1,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_2} &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \sqrt{3}I_3)v = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \mid \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \mid x = (2+\sqrt{3})y,\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}y\ \right\} = \operatorname{gen}\left(2+\sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\lambda_3} &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A + \sqrt{3}I_3)v = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \mid \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \mid x = (2-\sqrt{3})y,\ z = -\frac{\sqrt{3}}{3}y\ \right\} = \operatorname{gen}\left(2-\sqrt{3}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)
\end{aligned}$$

Con esto proponemos la base $B = \left\{(1,0,0), \left(2+\sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(2-\sqrt{3}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$, donde

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2. ¿Es toda matriz invertible también diagonalizable?

   Solución. Falso. Abundan los contraejemplos. Queremos tener una matriz que sea invertible más no diagonalizable, en otras palabras, buscamos una matriz con determinante distinto de cero y que por ejemplo no tenga vectores propios (equivalentemente, sin valores propios reales); Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se tiene que $\det(A) = 1$, por lo que A es invertible., pero al ver su polinomio característico $p(z) = \lambda^2 + 1$, este polinomio no tiene raíces reales, en particular no hay vectores propios, por lo que A no es diagonalizable. [1]

[1] Pregunta turística: ¿Qué pasa con las potencias de la matriz A que se usa de ejemplo? ¿En qué se parece a $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$? ¿Qué tiene que ver el polinomio en todo esto?