Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 8

1. Determine si existe alguna función lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,2,1) = (0,0,1),\ T(2,0,0) = (1,1,1),\ T(4,4,2) = (2,2,2)\ .$$

Solución. Supongamos que existe tal función lineal. Entonces, por definición,

$$T(v + \alpha w) = Tv + \alpha T w,\ \forall v, w \in \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ .$$

Ahora, notamos que $(4,4,2) = (2,0,0) + 2 \cdot (1,2,1)$ [1], por lo tanto

$$\begin{aligned} T(4,4,2) &= T((2,0,0) + 2 \cdot (1,2,1)) \\ \Rightarrow (2,2,2) &= T(2,0,0) + 2 \cdot T(1,2,1) \\ &= (1,1,1) + 2(0,0,1) = (1,1,3), \end{aligned}$$

lo que es una contradicción, lo que implica que el supuesto es falso, es decir, no existe función lineal T que cumpla con las condiciones requeridas.

2. Sea W un subespacio vectorial de V con $\dim(W) < \dim(V)$. Considere la función

$$T\ : V \to V,\quad T(v) := \mathrm{proy}_W v\ .$$

Demuestre que T es lineal.

Demostración. Sean $u, \mathrm{v} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y $B_W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ una base ortonormal de W. Entonces

$$\begin{aligned} T(u + \alpha \mathrm{v}) &= \mathrm{proy}_W(u + \alpha \mathrm{v}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left((u + \alpha \mathrm{v}) \cdot w_i\right) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} ((u \cdot w_i) + \alpha(\mathrm{v} \cdot w_i)) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} (u \cdot w_i)\, w_i + \alpha \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{v} \cdot w_i)\, w_i \\ &= \mathrm{proy}_W(u) + \alpha \mathrm{proy}_W(\mathrm{v}) \\ &= T(u) + \alpha T(\mathrm{v})\ . \end{aligned}$$

[1] Una forma metódica de encontrar combinaciones lineales entre vectores (usando este ejemplo): Considerar el conjunto $B = \{(1,2,1), (2,0,0), (4,4,2)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y ver si es un conjunto l.i. o l.d. Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos que sí hay combinaciones lineales no triviales que arman el vector nulo, por ejemplo $-2\gamma v_1 - \gamma v_2 + \gamma v_3 = 0$. En particular, si $\gamma = 1$, obtenemos la combinación lineal presentada.