Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 7

1. Sean

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y - z = 0 \right\},\ U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Encuentre la distancia de v a W, a U y a $U^{\perp}$.

Solución. Consideremos lo siguiente:

- **Definición:** Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base ortogonal de W. Definimos la proyección ortogonal de $v \in \mathbb{R}^n$ sobre W como

$$\text{proy}_W v := \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{v \cdot v_i}{\|v_i\|^2} \right) v_i \ \in W \ .$$

- **Proposición:** Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces:
  - Para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y $w \in W$ tenemos que $(v - \text{proy}_W v) \perp w$.
  - Dado $v \in \mathbb{R}^n$, la distancia de v a W está dada por $\|v - \text{proy}_W v\|$.

Para poder usar estos resultados, en primer lugar necesito al menos una base ortogonal para cada uno de los espacios involucrados;

- $W = \{(y+z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\,((1,1,0),(1,0,1))$, por lo que $B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$, al ser un conjunto l.i. , es base de W. Aplicamos a este conjunto el algoritmo de Gram- Schmidt (sin normalizar, pues nos basta una base ortogonal para usar las definiciones), para obtener la base ortogonal $B_W = \{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (1,1,0)$ y v_2 viene de

$$\begin{aligned} z_2 &= \text{proy}_{v_1}(1,0,1) \\ &= \left(\frac{v_1 \cdot (1,0,1)}{\|v_1\|^2} \right) v_1 \\ &= \left(\frac{(1,1,0)\cdot(1,0,1)}{\|(1,1,0)\|^2} \right)(1,1,0) \\ &= \frac{1}{2}(1,1,0) \\ \Rightarrow w_2 &= (1,0,1) - z_2 \\ &= (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \ . \end{aligned}$$

  Con esto, elijo $v_2 = (1,-1,2)$, por lo tanto $B_W = \{(1,1,0),(1,-1,2)\}$.

- $U = \text{Gen}\,((3,2,-1))$, por lo que $B_U = \{(3,2,-1)\}$ es base ortogonal de U.
- Por definición

$$\begin{aligned}
U^{\perp} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot u = 0,\ \forall u \in U\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \cdot \alpha(3,2,-1) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \cdot (3,2,-1) = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\} \\
&= \text{Gen}((1,0,3),(0,1,2))\ ,
\end{aligned}$$

  por lo que $B_2 = \{(1,0,3),(0,1,2)\}$, al ser l.i., es base de $U_{\perp}$, a la cual aplicamos G-S para obtener la base ortogonal $B_{U^{\perp}} = \{h_1, h_2\}$, donde $h_1 = (1,0,3)$ y h_2 está dado por

$$\begin{aligned}
z_2' &= \left(\frac{(1,0,3)\cdot(0,1,2)}{\|(1,0,3)\|^2}\right)(1,0,3) \\
&= \frac{6}{10}(1,0,3) = \frac{3}{5}(1,0,3) \\
\Rightarrow w_2' &= (0,1,2) - z_2' \\
&= (0,1,2) - \frac{3}{5}(1,0,3) \\
&= \left(-\frac{3}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)\ ,
\end{aligned}$$

  por lo que podemos escoger $h_2 = (-3,5,1)$, obteniendo $B_{U^{\perp}} = \{(1,0,3),(-3,5,1)\}$.

Con esto calculamos las respectivas distancias:

- Distancia de v a W $(d(v,W))$:

$$\begin{aligned}
d(v,W) &= \|v - \text{proy}_W v\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{v\cdot v_1}{\|v_1\|^2}v_1 + \frac{v\cdot v_2}{\|v_2\|^2}v_2\right)\right\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{(1,1,1)\cdot(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) + \frac{(1,1,1)\cdot(1,-1,2)}{\|(1,-1,2)\|^2}(1,-1,2)\right)\right\| \\
&= \left\|(1,1,1) - (1,1,0) - \frac{1}{3}(1,-1,2)\right\| \\
&= \left\|\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{1}{3}\,\|(-1,1,1)\| \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .
\end{aligned}$$

- Distancia de v a U $(d(v,U))$:

$$\begin{aligned}
d(v,U) &= \|v - \text{proy}_U v\| \\
&= \left\|(1,1,1) - \left(\frac{(1,1,1)\cdot(3,2,-1)}{\|(3,2,-1)\|^2}\right)(3,2,-1)\right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| (1,1,1) - \frac{3+2-1}{9+4+1}(3,2,-1) \right\| \\
&= \left\| (1,1,1) - \frac{2}{7}(3,2,-1) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7} \right) \right\| \\
&= \frac{1}{7} \left\| (1,3,9) \right\| \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{91} = \sqrt{\frac{13}{7}}
\end{aligned}
$$

- Distancia de v a $U^{\perp}$ ($d(v, U^{\perp})$):

$$
\begin{aligned}
d(v,W) &= \|v - \mathrm{proy}_{U^{\perp}} v\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{v \cdot h_1}{\|h_1\|^2} h_1 + \frac{v \cdot h_2}{\|h_2\|^2} h_2 \right) \right\| \\
&= \left\| v - \left(\frac{(1,1,1)\cdot(1,0,3)}{\|(1,0,3)\|^2}(1,0,3) + \frac{(1,1,1)\cdot(-3,5,1)}{\|(-3,5,1)\|^2}(-3,5,1) \right) \right\| \\
&= \left\| (1,1,1) - \frac{2}{5}(1,0,3) - \frac{3}{35}(-3,5,1) \right\| \\
&= \left\| \left(1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{35}, 1 - \frac{3}{7}, 1 - \frac{6}{5} - \frac{3}{35} \right) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{24}{35}, \frac{4}{7}, \frac{-10}{35} \right) \right\| \\
&= \frac{2}{7} \left\| \left(\frac{12}{5}, 2, -1 \right) \right\| \\
&= \frac{2}{7} \sqrt{\frac{144}{25} + 4 + 1} \\
&= \frac{2}{35}\sqrt{269}.
\end{aligned}
$$