Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicios resueltos 6

1. Determine una base y la dimensión de los siguientes e.v.:

   (a) $U_1 \cap U_2$, donde $U_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0 \ , \ y + w = 0\}$ y $U_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v = \alpha(1, -1, 0, 2) + \beta(0, 2, 1, -1) \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $W_2 = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) \ , \ a_{11} + a_{22} = 0\}$

Solución (a). Sea $v = (x, y, z, w)$ tal que $v \in U_1 \cap U_2$, entonces $v = (\alpha, 2\beta - \alpha, \beta, 2\alpha - \beta)$ por estar en U_2, y además $\alpha - 2(2\beta - \alpha) + \beta = 0$ y $(2\beta - \alpha) + (2\alpha - \beta) = 0$ por estar en U_1, es decir $\alpha = \beta$ y $\alpha = -\beta$ lo que implica que $\alpha = \beta = 0$.

Esto nos dice que si $v \in U_1 \cap U_2$ entonces $v = 0$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, un espacio de dimensión 0.

Otra forma de hacerlo:

Tenemos que

$$\begin{aligned} U_2 &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v = \alpha(1, -1, 0, 2) + \beta(0, 2, 1, -1) \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z, w) = (\alpha, -\alpha + 2\beta, \beta, 2\alpha - \beta)\} \ . \end{aligned}$$

De esta descripción del conjunto obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= 2\beta - \alpha \\ z &= \beta \\ w &= 2\alpha - \beta \end{aligned}$$

Como $x = \alpha$ y $z = \beta$, tenemos que

$$\begin{aligned} y &= 2z - x \\ w &= 2x - z \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$U_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 2z - x, w = 2x - z\} \ .$$

Con esto

$$U_1 \cap U_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0 \ , \ y + w = 0 \ , \ y = 2z - x \ , \ w = 2x - z\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que concluímos (como antes) que $U_1 \cap U_2$ es de dimensión 0.

Solución (b). Escribimos el conjunto de formas distintas:

$$\begin{aligned} W_2 &= \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) \ , \ a_{11} + a_{22} = 0\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & -a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Gen} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) . \end{aligned}$$

Esto significa que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de W_2.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

desde donde tenemos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Por lo tanto el conjunto B es l.i. Concluímos que B es base de W_2, y por lo tanto $dim(W_2) = 3$.

2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) Si $\{v, w\} \subset V$ es l.i. y $u \in \text{Gen}(v, w)$, entonces $\{v, w, u\} \subset V$ es l.d.

   (b) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto l.i. de vectores en V, entonces $\{w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_2 + v_3, w_3 = v_3 + v_1\}$ es también un conjunto l.i. en V.

Solución (a). Por definición, un conjunto es l.d. cuando al menos uno de sus vectores se puede escribir como combinación lineal del resto. En el caso del conjunto $\{v, w, u\}$, como $u \in \text{Gen}(v, w)$, el vector u es combinación lineal de v y w ($\text{Gen}(v, w)$ corresponde al conjunto de todas las combinaciones lineales entre v y w). Por lo tanto la afirmación es verdadera.

Solución (b). Sabemos que si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$, entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dicho esto, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} & aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \\ \Rightarrow\ & a(v_1 + v_2) + b(v_2 + v_3) + c(v_3 + v_1) = 0 \\ \Rightarrow\ & (a + c)v_1 + (a + b)v_2 + (b + c)v_3 = 0 \end{aligned}$$

esto implica (por lo que dijimos al comienzo)

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ a + b &= 0 \\ b + c &= 0 \\ \Rightarrow a = -c \ \Rightarrow\ b - c &= 0 = b + c \\ \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a &= 0 = b\ . \end{aligned}$$

Conclumos que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es un conjunto l.i., por lo tanto la afirmación es verdadera.