Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 3

1. Determine la matriz $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ tal que la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 :\ x \to Ax$ actúa del siguiente modo:

   (a) Cada vector ser refleja a través del eje Y y luego se rota en un ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del origen.

   (b) Cada vector se refleja a través del eje X y luego se refleja a través de la recta $y = x$.

Solución. **a)** Sea T_1 la función que hace una reflexión con respecto al eje Y, $T_{\frac{\pi}{3}}$ la rotación en un ángulo de $\frac{\pi}{3}$, y T la transformación que resulta de hacer consecutivamente estas dos como describe el enunciado. Sabemos que

$$\begin{aligned}
T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}, \\
T_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T_{\frac{\pi}{3}}\left(T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde podemos ver la matriz asociada a la transformación T.

b) Sea T la transformación pedida, T_X la transformación asociada a reflejar a través del eje X y T_L reflejar a través de $L: \ y = x$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
T_X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
T_L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T_L \left(T_X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

2. Determine el ángulo apropiado para rotar cada una de las siguientes cónicas y determine que cónica es. Esboce cada una junto con los dos sistemas de referencia.

   (a) $\sqrt{3}x^2 + 3xy = 3$.

   (b) $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$.

   Solución. a) El ángulo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ adecuado [1] para rotar el sistema de referencia es aquel que cumple

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

   donde, en este caso, $A = \sqrt{3}$, $B = 3$, $C = 0$. ($D = E = 0$ y $F = -3$, pero no los necesitamos para saber el ángulo).

   Ahora, para saber cuál es el ángulo que cumple esto existen varias formas, pero cuando hay una raíz de por medio se suele hacer lo siguiente: Vamos a armar

[1] Recordar que nosotros conocemos de forma analítica cónicas con ejes horizontales o verticales, por lo que si una cónica que aparece girada (en su expresión analítica aparece el término con xy que no aparece en las horizontales ni verticales) queremos rotar nuestro sistema de referencia de manera que la cónica parezca horizontal o vertical. Dicho esto, dada una cónica rotada, basta una rotación en un ángulo agudo para que quede horizontal o vertical.

un triángulo rectángulo donde suceda que $\cot(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\cot\theta = (\tan\theta)^{-1}$, por lo que podríamos decir que cotangente corresponde a ”cateto adyacente dividido por cateto opuesto”):

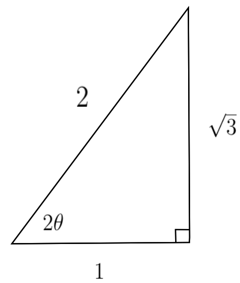

Fig. 1: Triángulo rectángulo de la situación.

Así, completando el valor de la hipotenusa con teorema de Pitágoras, podemos ver que

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2} \ ,$$
$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

desde donde tenemos que $2\theta = \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{6}$.

Con esto ya podemos hacer el cambio de coordenadas:

$$x = \tilde{x}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \tilde{y}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x} - \frac{\tilde{y}}{2}$$

$$y = \tilde{x}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tilde{y}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$y = \frac{\tilde{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{y} \ .$$

Reemplazamos estas identidades en nuestra ecuación original como sigue:

$$
\begin{aligned}
3 &= \sqrt{3}x^2 + 3xy \\
3 &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x} - \frac{\tilde{y}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x} - \frac{\tilde{y}}{2}\right)\left(\frac{\tilde{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{y}\right) \\
12 &= \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\tilde{x} - \tilde{y}\right)^2 + 3\left(\sqrt{3}\tilde{x} - \tilde{y}\right)\left(\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{y}\right) \\
12 &= \sqrt{3}\left(3\tilde{x}^2 - 2\sqrt{3}\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2\right) + 3\left(\sqrt{3}\tilde{x}^2 + 3\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{x}\tilde{y} - \sqrt{3}\tilde{y}^2\right) \\
12 &= 6\sqrt{3}\tilde{x}^2 - 2\sqrt{3}\tilde{y}^2 \\
1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x}^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\tilde{y}^2 \\
1 &= \frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\right)^2} - \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{3}}\right)^2} \ .
\end{aligned}
$$

Notamos que efectivamente no aparecen términos cruzados, y podemos afirmar que la cónica corresponde a una hipérbola por su forma en este nuevo sistema de referencia. Presento los esbozos de la cónica en ambos sistemas de referencia.

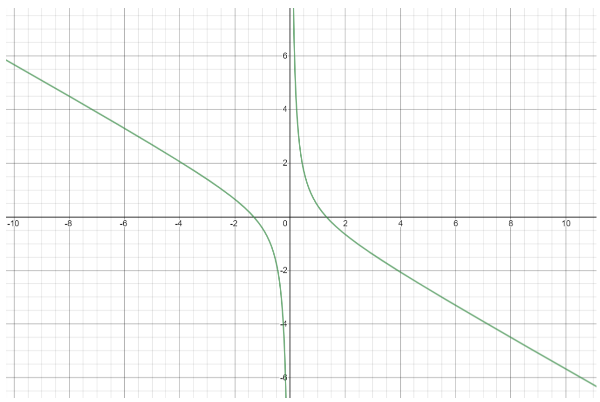

Fig. 2: Hipérbola vista en el sistema de referencia XY.

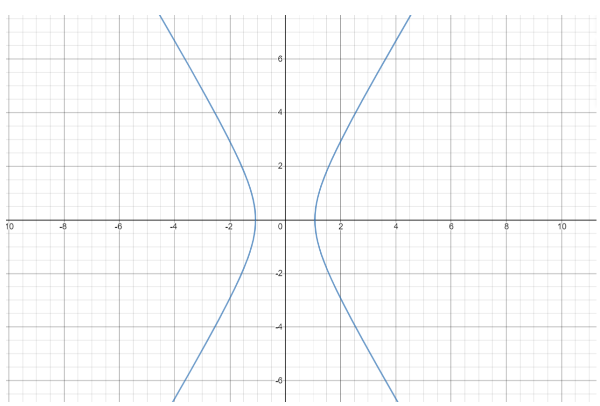

Fig. 3: Hipérbola vista en el sistema de referencia $\tilde{X}\tilde{Y}$.

b) Buscamos θ tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{1-1}{2} = 0 \ ,$$

por lo que

$$\cos(2\theta) = 0 \ \Rightarrow \ 2\theta = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{4} \ .$$

Con esto obtenemos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tilde{y}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y} \\ \\ y &= \tilde{x}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tilde{y}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y} \ . \end{aligned}$$

Así la ecuación original queda:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2xy + y^2 + x - y \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) \\ 0 &= 2\tilde{x}^2 - \sqrt{2}\tilde{y} \ , \end{aligned}$$

por lo que esta cónica corresponde a una parábola. A continuación se ven esbozos de la parábola en ambos sistemas de referencia:

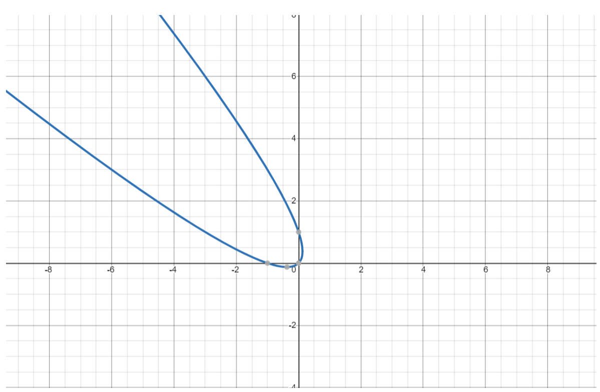

Fig. 4: Parábola vista en el sistema de referencia XY.

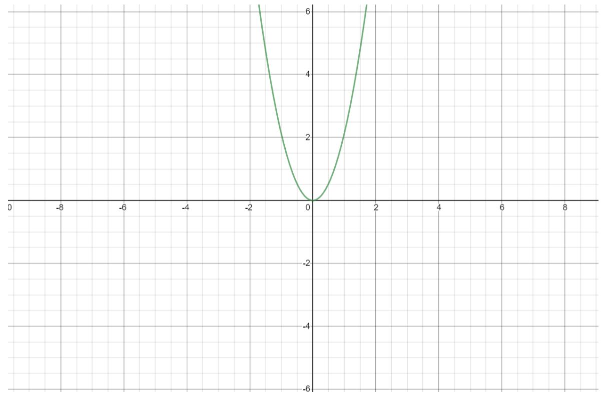

Fig. 5: Parábola vista en el sistema de referencia $\tilde{X}\tilde{Y}$.