Universidad de Chile

Programa Académico de Bachillerato

Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 4

1. Determinar, en cada caso, si los pares de rectas se cruzan, se intersectan, son paralelas o son coincidentes:

 a)

$$\mathcal{L}_1 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} , \mathcal{L}_2 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ s, t \in \mathbb{R}$$

 Solución. En primer lugar notamos que estas rectas no son paralelas; son paralelas si sus vectores directores lo son, los cuales son paralelos cuando uno es múltiplo del otro. En este caso eso significaría que $(1, -3, 0) = \lambda(3, -1, 6)$. Esto implica que $3\lambda = 1$ y que $\lambda = 0$, por lo tanto no existe dicho λ).

 Sea $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $x \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Entonces $x \in \mathcal{L}_1$ y $x \in \mathcal{L}_2$, lo que pordefinición me dice que existen s y t tales que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Igualando estas dos expresiones de x tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \ ,$$

 a partir de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 + t &= 1 + 3s \\ -1 - 3t &= 8 - s \\ 1 &= -2 + 6s \ . \end{aligned}$$

 La última ecuación nos dice que $s = \frac{1}{2}$. Al reemplazar este valor en la segunda ecuación obtenemos que $t = \frac{3}{2}$. Reemplazamos estos dos valores en la segunda ecuación para ver si el sistema es consistente; $-1 - 3 \cdot \frac{3}{2} = 8 - \frac{1}{2}$, igualdad totalmente falsa (un número negativo igual a un número positivo). Esto quiere decir que el sistema es inconsistente (no tiene soluciones), por lo tanto no existen $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $x \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, lo que nos lleva a que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \varnothing$. Concluímos que estas rectas se cruzan.

b)

$$\mathcal{L}_1 \text{ que contiene } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{L}_2 \text{ pasa por } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y es paralela a } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para una recta que pasa por dos puntos podemos utilizar cualquier punto sobre esta recta como vector posición, además que la resta entre 2 puntos me sirve para obtener un vector director. Dicho esto podemos escribir que

$$\mathcal{L}_1 \ : \ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ahora, $\mathcal{L}_2$ es paralela al vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, por lo que puedo considerar a dicho vector como vector director de la recta (notar que este vector no pertenece a $\mathcal{L}_2$), es decir

$$\mathcal{L}_2 \ : \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}.$$

Con esto procedemos como antes: Notamos en primer lugar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelas, además la intersección estará determinada por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 1 + 2t &= 2 \\ 5 + 2t &= 1 + 2s \\ 3 - 2t &= 2 + 2s \ . \end{aligned}$$

Tenemos que $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{5}{2}$ y $s = 0$, por lo que no hay soluciones. Concluímos como antes que estas rectas se cruzan.