Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 1

1. Sea A una matriz de $n \times n$ dada por

$$a_{i,j} = \begin{cases} 3 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Calcule $\det A$.

Solución. Para entender lo que haremos nos fijamos primero en valores pequeños de n:

- Si $n = 1$ entonces $A = (a_{11}) = (3)$, por lo que $\det A = 3$.
- Si $n = 2$ entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
  y podemos calcular directamente el determinante: $\det A = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 6 = 2 \cdot 3$.
- Si $n = 3$ entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
  También podemos calcular directamente el determinante con su definición recursiva:

$$\begin{aligned} \det A &= 3(3 \cdot 3 - 3 \cdot 1) - 3(1 \cdot 3 - 1 \cdot 3) + 3(1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) \\ &= 12 = 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

  Se va notando un patrón en el determinante, pero veremos un caso más;
- Si $n = 4$ entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
  Calcular el determinante de esto por definición es bastante largo, así que primero aplicaremos operaciones elementales a la matriz para ver si se simplifican los cálculos;

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - f_4]{\substack{f_1 - f_2 \\ f_2 - f_3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B \ .$$

Todas las operaciones elementales que utilizamos para transformar la matriz A en la matriz B son "la suma de una fila con un múltiplo de otra", por lo que en ninguno de los pasos alteramos el determinante de la matriz, luego $\det A = \det B = 2^3 \cdot 3$ (Al ser B matriz triangular, su determinante corresponde al producto de los elementos de su diagonal.)

Dicho lo anterior, repetiremos exactamente lo mismo del último ejemplo para el caso general;

Conjetura: Si A es como en el enunciado, entonces $\det A = 2^{n-1} \cdot 3$.

Definimos las operaciones elementales e_i que hacen $f_i - f_{i+1}$, considerando $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Luego de aplicar dichas transformaciones a la matriz A obtenemos la matriz $B = (b_{i,j})$, donde

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } \ i = j \neq n \\ 1 & \text{si } \ i = n, \ j \neq n \\ 3 & \text{si } \ i = j = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad ,$$

o dicho de otro modo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} .$$

Concluímos que $\det A = \det B = 2^{n-1} \cdot 3$.

Ahora, esto corresponde a un cálculo del determinante (dando respuesta a la pregunta). Ahora, si quisiera demostrar la conjetura tendría o que agregar bastante detalle al desarrollo anterior, o podemos intentar demostrarlo por inducción.

Demostración conjetura: Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos la matriz $(a_{ij}) = A_n \in M_{nn}(\mathbb{R})$, donde $a_{i,j} = \begin{cases} 3 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$.

- Si $n = 1$, entonces $A_1 = (3)$, por lo que $\det A = 3 = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 2^{1-1}$.

- Hipótesis: $\det A_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Por demostrar: $\det A_{n+1} = 3 \cdot 2^n$.
  Notamos que

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & & 3 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & & 3 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = eA_{n+1} \ .
\end{aligned}
$$

  Como sabemos que $\det(A_{n+1}) = \det(eA_{n+1})$, nos basta calcular:

$$
\begin{aligned}
\det(A_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ 1 & & & \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot \det A_n + 0 + \cdots + 0 \\
&= 2 \cdot (3 \cdot 2^{n-1}) = 3 \cdot 2^n \ .
\end{aligned}
$$

  Luego, por principio de inducción, $\det A_n = 2^{n-1} \cdot 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$.