PROGRAMA DE BACHILLERATO
UNIVERSIDAD DE CHILE

Solución Taller N°2
Cátedra de Física I
18 de noviembre de 2020

Profesores:
Dany López, Jaime Romero
Isidora Caprile, Denisse Pastén
Pablo Aguilera, Elízabeth Garcés

Problema 1

Durante la ejecución del salto de t_s del actor Duke Caboom sobre un acantilado de d, los organizadores recuerdan que no ajustaron la rampa de llegada que se encuentra a h más abajo que la primera. Rápidamente comienzan a revisar sus notas y encuentran que calcularon el ángulo de la rampa de salida como

$$\alpha = \arctan\left(\frac{gt_s^2 - 2h}{2d}\right)$$

y la rapidez con que deja la rampa de salida,

$$v_0 = \frac{d}{t_s}\sqrt{\left(\frac{gt_s^2 - 2h}{2d}\right)^2 + 1}$$

1. ¿Cuales son las componentes cartesianas de la velocidad al momento del aterrizaje?.
2. Considerando las componentes de la velocidad ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación β de la rampa de aterrizaje? (considere un aterrizaje "suave").
3. ¿Con que rapidez llegará a la rampa de aterrizaje?

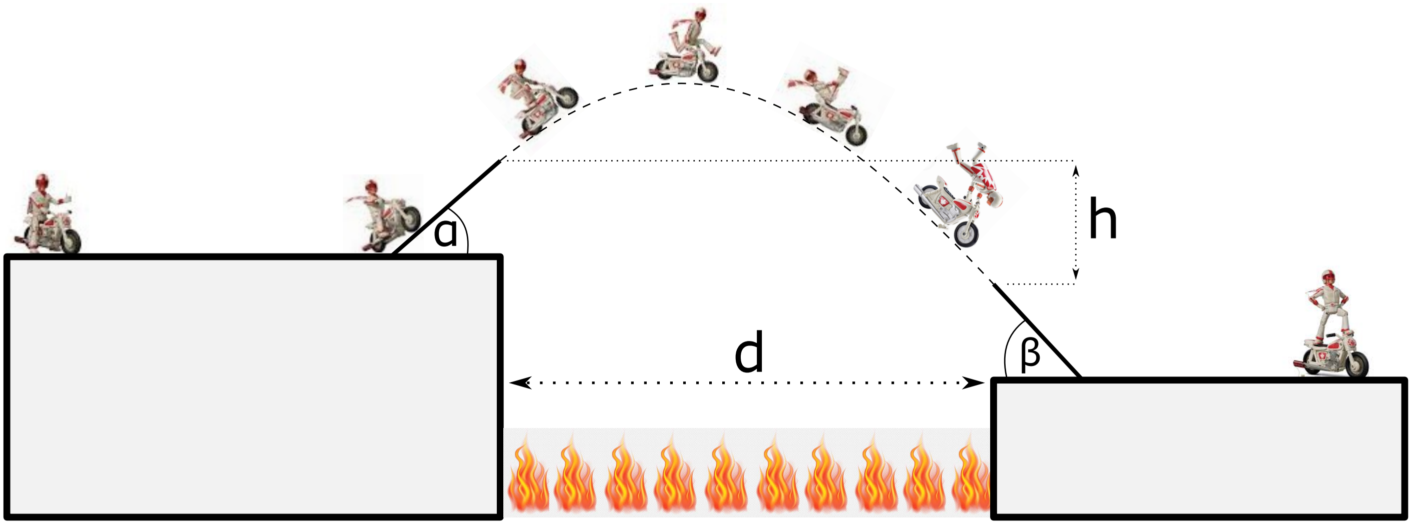

Figura 1: Diagrama del plan de salto de Duke Caboom.

Hint:

$$\cos\left(\arctan\left(x\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\sin\left(\arctan\left(x\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Profesores:
Dany López, Jaime Romero
Isidora Caprile, Denisse Pastén
Pablo Aguilera, Elízabeth Garcés

Solución

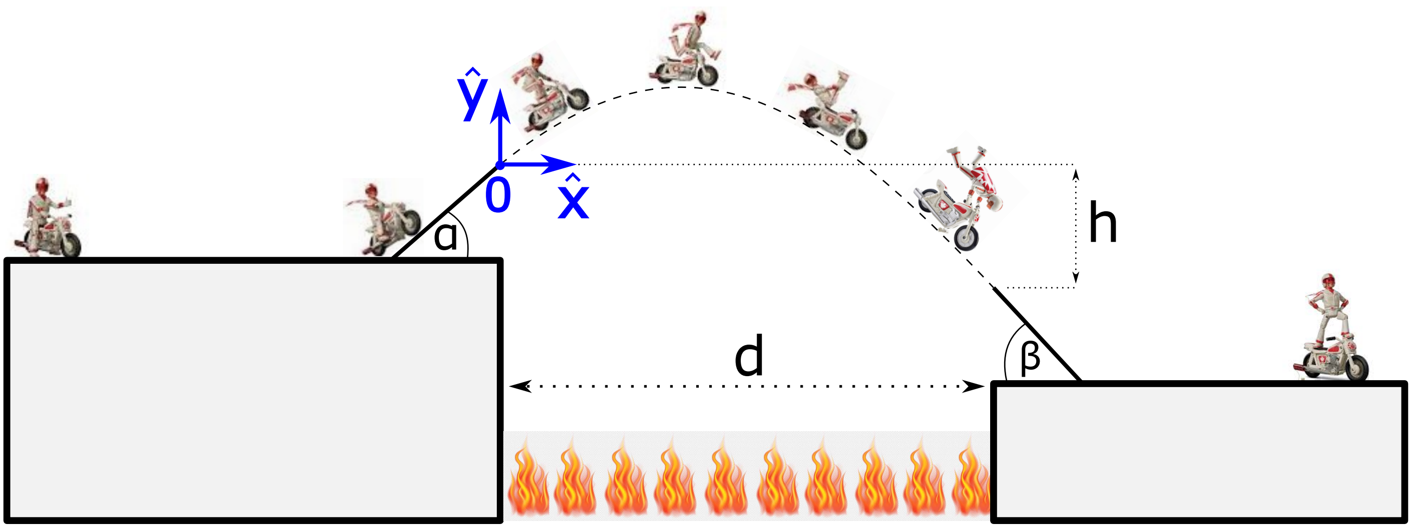

Figura 2: Elección del sistema de referencia (azul).

Según el sistema de referencia de la Figura 2 en la ayudantía 4 se dedujeron las ecuaciones de movimiento (1) y (2) ,

$$\vec{r}(t) = \vec{0} + v_0 \left(\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}\right) t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y} \tag{1}$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \left(\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}\right) - g t \hat{y} \tag{2}$$

Evaluándolas en el punto de despegue se obtuvo el ángulo salida,

$$\alpha = \arctan\left(\frac{g t_s^2 - 2h}{2d}\right) \tag{3}$$

y la rapidez de salida,

$$v_0 = \frac{d}{t_s}\sqrt{\left(\frac{g t_s^2 - 2h}{2d}\right)^2 + 1} \tag{4}$$

El ángulo de la rampa de llegada estará relacionada con el ángulo del vector velocidad en tal punto, es decir, para tener un aterrizaje "suave" se necesita que la dirección de la rampa y del vector velocidad sean iguales. En la Figura 3, se muestra el vector velocidad al momento del despegue y aterrizaje, donde se observa que el ángulo de la rampa β se relaciona con las componentes cartesianas de la velocidad.

Evaluando la ecuación de movimiento (2) al momento de tocar la rampa de llegada (t_s),

$$\vec{v}(t_s) = v_0 \left(\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}\right) - g t_s \hat{y}$$
$$\vec{v}(t_s) = \underbrace{v_0 \cos\alpha}_{v_x} \hat{x} + \underbrace{\left(v_0 \sin\alpha - g t_s\right)}_{v_y} \hat{y}$$

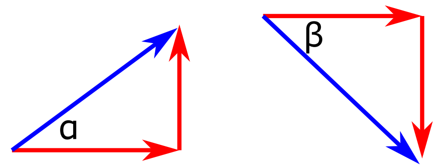

Figura 3: Vectores de velocidad inicial y final (azul) con sus respectivas componentes en coordenadas cartesianas (rojo).

luego las componentes de la velocidad al momento de llegada son,

$$\begin{aligned}
v_x &= v_0 \cos\alpha \\
v_x &= \left(\frac{d}{t_s}\sqrt{\left(\frac{gt_s^2 - 2h}{2d}\right)^2 + 1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{gt_s^2-2h}{2d}\right)^2 + 1}}\right) \\
v_x &= \frac{d}{t_s} \qquad (5)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
v_y &= v_0 \sin\alpha - gt_s \\
v_y &= \left(\frac{d}{t_s}\sqrt{\left(\frac{gt_s^2 - 2h}{2d}\right)^2 + 1}\right)\left(\frac{\frac{gt_s^2-2h}{2d}}{\sqrt{\left(\frac{gt_s^2-2h}{2d}\right)^2 + 1}}\right) - gt_s \\
v_y &= \frac{d}{t_s}\frac{gt_s^2 - 2h}{2d} - gt_s \\
v_y &= \frac{gt_s^2 - 2h}{2t_s} - gt_s \\
v_y &= \frac{gt_s^2 - 2h - 2gt_s^2}{2t_s} \\
v_y &= -\frac{2h + gt_s^2}{2t_s} \qquad (6)
\end{aligned}$$

de esta forma, el ángulo β (ver Figura 3) será,

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{v_y}{v_x} \\
\tan\beta &= -\frac{2h+gt_s^2}{2t_s}\frac{t_s}{d} \\
\tan\beta &= -\frac{2h+gt_s^2}{2d} \\
\tan\beta &= \frac{gt_s^2-2h}{2d}-\frac{2gt_s^2}{2d} \\
\tan\beta &= -\frac{2h+gt_s^2}{2d} \\
\beta &= \arctan\left(-\frac{gt_s^2+2h}{2d}\right)
\end{aligned}
$$

finalmente el módulo de la velocidad,

$$
\begin{aligned}
v(t_s) &= \sqrt{\left(\frac{d}{t_s}\right)^2+\left(\frac{gt_s^2+2h}{2t_s}\right)^2} \\
v(t_s) &= \frac{1}{t_s}\sqrt{d^2+\left(\frac{gt_s^2+2h}{2}\right)^2} \\
v(t_s) &= \frac{1}{2t_s}\sqrt{4d^2+\left(gt_s^2+2h\right)^2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$