Solución Ayudantía N°4
Cátedra de Física I
18 de noviembre de 2020

Profesores:
Dany López, Jaime Romero
Isidora Caprile, Denisse Pastén
Pablo Aguilera, Elízabeth Garcés

Problema 1

El actor de Toy Story, Duke Caboom, planea un salto en moto sobre un acantilado usando rampas. La segunda rampa está $h = 15$ m más abajo que la primera, y el acantilado tiene $d = 60$ m de ancho. Si el actor quiere realizar un salto de $t_s = 3$ s,

1. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación α de la rampa de lanzamiento?
2. ¿Cuál debe ser la rapidez de lanzamiento?

Hint:

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

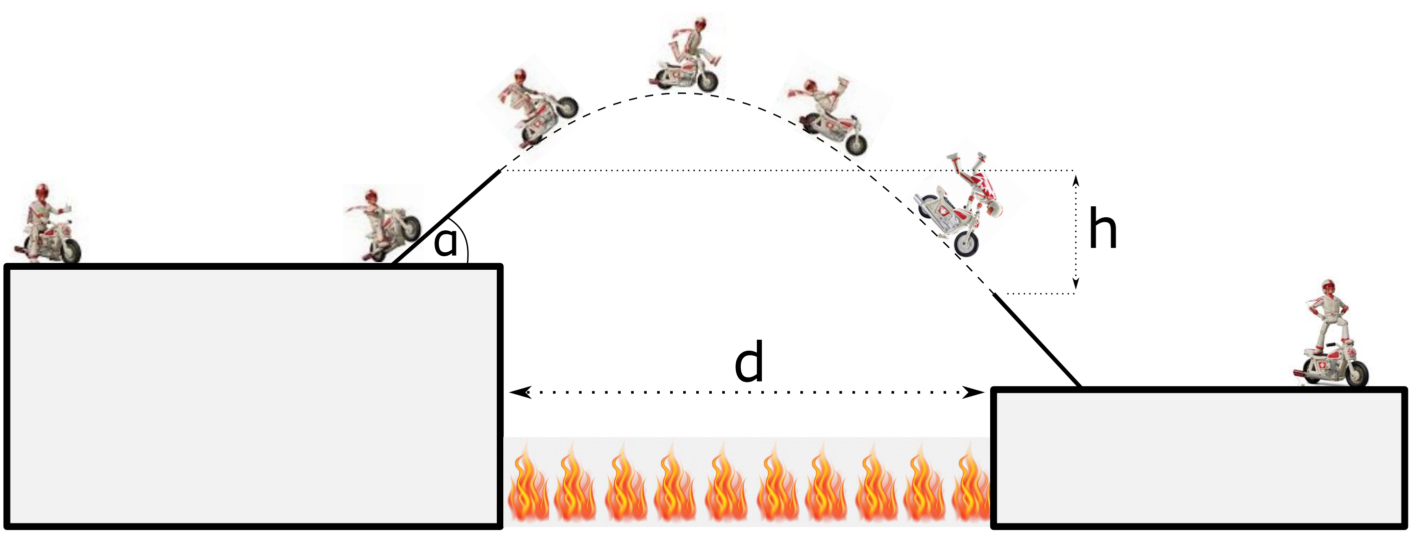

Figura 1: Diagrama del plan de salto del actor de cine.

Solución

Considere el sistema de referencia indicado en la Figura 2. Las ecuaciones de movimiento del actor son:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{1}$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{2}$$

Según el sistema de referencia de la Figura 2, la posición inicial, velocidad inicial y aceleración son:

$$\vec{r}_0 = \vec{0} \tag{3}$$
$$\vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y}) \tag{4}$$
$$\vec{a} = -g\hat{y} \tag{5}$$

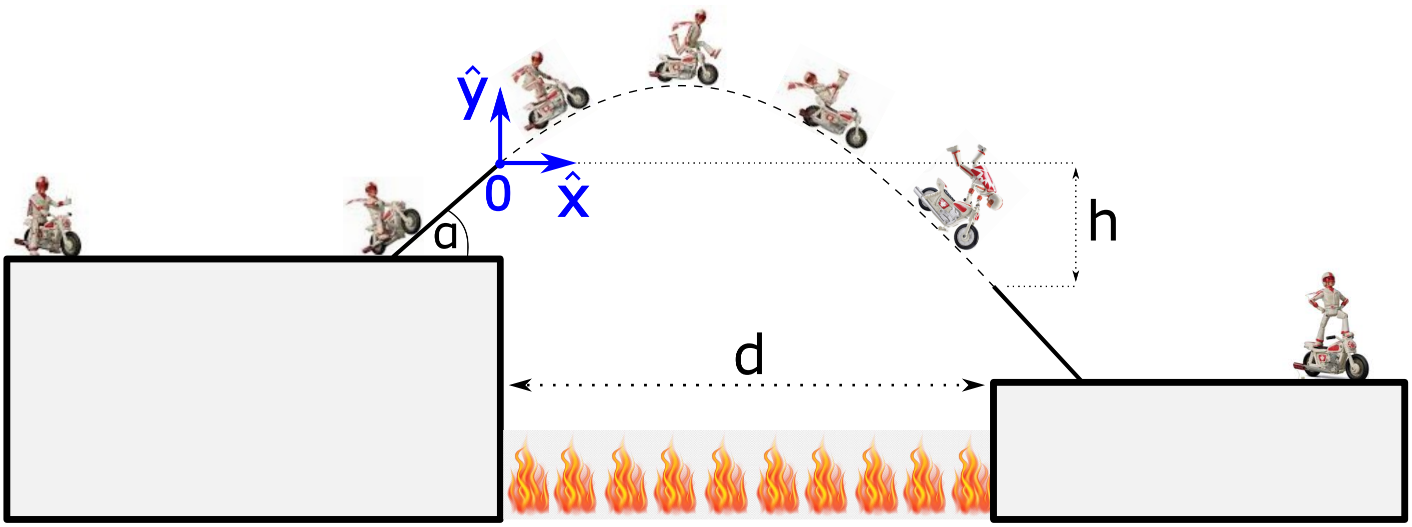

Figura 2: Elección del sistema de referencia (azul).

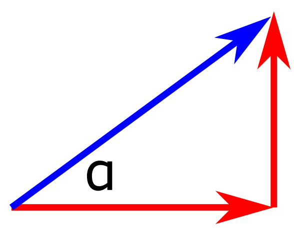

Figura 3: Vector de velocidad inicial (azul) y sus componentes en coordenadas cartesianas (rojo) según el sistema de referencia (ver Figura 2).

Luego las ecuaciones de movimiento (1) y (2) se escriben como,

$$\vec{r}(t) = \vec{0} + v_0 \left(\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}\right) t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y} \tag{6}$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \left(\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}\right) - g t \hat{y} \tag{7}$$

Estas ecuaciones describen el movimiento del actor durante el salto y a las cuales podemos evaluarlas en algún punto de conveniencia. Como el actor *debe* llegar a la segunda rampa, evaluaremos la ecuación de posición del actor en la ubicación de la segunda rampa para obtener alguna condición sobre la velocidad inicial. Evaluando la ecuación (6) en el punto de llegada luego de t_s segundos de vuelo,

$$\vec{r}(t_s) = d\hat{x} - h\hat{y}$$

$$v_0 \left(\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}\right) t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 \hat{y} = d\hat{x} - h\hat{y}$$

$$\left(v_0 t_s \cos\alpha - d\right) \hat{x} + \left(v_0 t_s \sin\alpha + h - \frac{1}{2} g t_s^2\right) \hat{y} = \vec{0} \tag{8}$$

separando por componentes, obtenemos un sistema de 2 ecuaciones,

$$v_0 t_s \cos\alpha - d = 0 \tag{9}$$
$$v_0 t_s \sin\alpha + h - \frac{1}{2} g t_s^2 = 0 \tag{10}$$

De la ecuación (9) obtenemos la velocidad inicial,

$$v_0 = \frac{d}{t_s \cos\alpha} \tag{11}$$

reemplazando la ecuación (11) en la ecuación (10),

$$\begin{aligned}
0 &= v_0 t_s \sin\alpha + h - \frac{1}{2} g t_s^2 \\
0 &= \frac{d}{t_s \cos\alpha} t_s \sin\alpha + h - \frac{1}{2} g t_s^2 \\
d \tan\alpha &= \frac{1}{2} g t_s^2 - h \\
\tan\alpha &= \frac{g t_s^2 - 2h}{2d} \\
\alpha &= \arctan\left(\frac{g t_s^2 - 2h}{2d}\right) \qquad (12) \\
\alpha &\approx 25,9^\circ
\end{aligned}$$

Reemplazando el ángulo de la rampa de lanzamiento α en la ecuación (11) obtendremos la rapidez de lanzamiento,

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{d}{t_s \cos\alpha} \\
v_0 &= \frac{d}{t_s \cos\left(\arctan\left(\frac{g t_s^2 - 2h}{2d}\right)\right)} \\
v_0 &= \frac{d}{t_s} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g t_s^2 - 2h}{2d}\right)^2 + 1}}} \\
v_0 &= \frac{d}{t_s} \sqrt{\left(\frac{g t_s^2 - 2h}{2d}\right)^2 + 1} \qquad (13) \\
v_0 &\approx 22,2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 79,9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}
\end{aligned}$$