Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
2*do.* semestre de 2020

Guía 1 de Matemáticas 2
Continuidad, derivadas y aplicaciones de la derivada

1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. ¿Es cierto que el gráfico de f es una curva que se dibuja sin levantar el lápiz?

2. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que

   a) $x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene solución real entre 0 y 1.

   b) $t^3 \cos(t) + 6 \operatorname{sen}^5(t) - 3 = 0$ tiene solución real entre 0 y 2π.

   c) $\sqrt{x} - \cos(x) = 0$ tiene una solución real entre 0 y $\pi/2$.

   d) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ tiene al menos una solución real.

3. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y biyectiva tal que $f(0) = 0$. Muestre que $f(1) = 1$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \neq 0$ y $f(\pi) = -1$. Demuestre que $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq 4x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en cero. (Ayuda: Pruebe que $f(0) = 0$).

6. Demuestre que si f es continua en $[0, 1]$ y ahí satisface $0 \leq f(x) \leq 1$, entonces f tiene un punto fijo; esto es, existe un c en $[0, 1]$, tal que $f(c) = c$. ($\star$) (ayuda: use $g(x) = x - f(x)$)

7. Utilizando reglas de derivación, determine la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = (x^2 - 2x - 1)(3x - 1)$.

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 1}{2(5x + 3)}$.

   c) $f(x) = \dfrac{x(3 - x^2)}{2\sqrt{x}}$.

   d) $f(x) = 5 \operatorname{sen}(x) - 7 \cos(x) - \sqrt{x}$.

   e) $f(x) = \dfrac{2x^4}{b^2 - x^2}$.

   f) $f(x) = x^3(\sqrt{x} - 3x)^2$.

   g) $f(x) = \cos^2(5x) + x \operatorname{sen}(3x) - \cos(x^2)$.

   h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(ax) - \cos(ax)}{\cos(ax)}$.

   i) $f(x) = \left((x^3 + 2x + 1)^3 + \dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

   j) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

   k) $f(x) = \dfrac{(x^3(\sqrt{x} - 3x)^2)^4}{(x + 1)^2}$.

   l) $f(x) = \sqrt{\cos(x^{\frac{1}{2}})}$.

   m) $f(x) = a\left(1 - \cos^2(\dfrac{x}{2})\right)^2 \left(1 - \operatorname{sen}^2(\dfrac{x}{2})\right)^2$.

   n) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(2x - 3)$

   ñ) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2 + 1})$

   o) $f(x) = \operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

8. Considere la función $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(2, f(2))$.

9. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

10. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x}{x+1}$ pasan por el punto (1,2)?. ¿En cuáles puntos estas tangentes cortan a la curva?

11. Encontrar $k \in \mathbb{R}$, tal que la recta dada sea tangente a la gráfica de la función.

    a) $f(x) = x^2 - kx$, recta $y = 5x - 4$.

    b) $f(x) = \dfrac{k}{x}$, recta $y = -\dfrac{3}{4}x + 3$.

12. Determine la función afín que mejor aproxima a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ cerca del origen.

13. Aproxime el valor numérico de los siguientes números utilizando la recta tangente de las siguientes funciones en los siguientes puntos:

    a) Aproxime $\sqrt{5}$ mediante la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x_0 = 4$.

    b) Aproxime $\cos 1$ mediante la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \cos x$ en el punto $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. (Estime $\pi \approx 3,14$)

    c) Aproxime $\operatorname{sen}(1)$ mediante la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.(Estime $\pi \approx 3,14$)

14. Para las siguientes funciones, determinar la ecuación de la recta tangente T a la gráfica de f en un punto dado. Utilizar ésta aproximación lineal para completar la tabla.

x	1,9	1,99	2	2,01
$f(x)$				
$T(x)$				

    a) $f(x) = x^2$, $(2, 4)$.

    b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $(2, \operatorname{sen}(2))$.

    c) $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$, $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

    d) $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$, $(2, \operatorname{cosec}(2))$ $(\star)$.

15. Calcula el valor de las siguientes expresiones, utilizando la regla de L'Hópital.

    a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 3x^2 + 5x + 2}$.

    b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}} + 5\right)$.

c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-2x+15}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2}$.

e) $\lim_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}\right]$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$.

g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x-2} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{5x^2+2x+11}+1\right)$.

h) $\dfrac{\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2(3x)}{\cos(2x)-1}+2\right)}{2+\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x^2}}$.

i) $\dfrac{\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}} - \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}}{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}(5x)}}$.

j) $\dfrac{\lim_{x\to 0}\frac{2x)}{\operatorname{sen}(9x)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cot(x)-\tan(x)}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}}{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}}$.

16. En cada una de las siguientes funciones, indique en qué intervalos es creciente y en qué intervalos es decreciente.

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x, \quad x \in \mathbb{R}$.

b) $h(z) = \dfrac{z^4}{4} - \dfrac{4z^3}{6}, \quad z \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

17. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donde D está dado y f se define en cada caso. Esbozar el gráfico de f realizando análisis de curva, es decir, determine: interceptos, asíntotas, crecencia, concavidad, puntos máximos, mínimos, puntos de inflexión, etc.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, donde $D = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, donde $D = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$, donde $D = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, donde $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

18. Determine intervalos de crecimiento y de decrecimiento, asíntotas horizontales y/o verticales, máximos y mínimos de las siguientes funciones. Concluya esbozando una gráfica.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 6$.

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5\operatorname{sen}(2x+\pi) + 2$.

d) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$.

19. Un nadador se lanza desde un trampolín de altura 32 pies sobre el nivel de la piscina. La posición del nadador después de t segundos desde que salto es $h(t) = -16t^2 + 16t + 32$ pies. Determine la velocidad del nadador en el momento que impacta el agua.

20. Un mecanismo circular hace mover un pistón, de tal forma que en el segundo t su posición es

$$x(t) = 5 + 3\cos(2t)$$

   a) Calcule la velocidad del pistón en cada segundo t.

   b) Determine la máxima velocidad del pistón.

21. Los Ichthyosaurus fueron un grupo de reptiles marinos comparable en tamaño a los actuales delfines. Ellos se extinguieron durante el Cretaceo. Basado en el estudio de algunos fósiles se encontró la siguiente relación

$$C(x) = (1,262)[E(x)]^{0,9}$$

donde $C(x)$ es el largo del cráneo a la edad x y $E(x)$ es el largo de la espina dorsal a la edad x.

Calcule $\dfrac{C'(x_1)}{C(x_1)}$ en el momento en que $\dfrac{E'(x_1)}{E(x_1)} = 1$.

22. Determine qué punto de la curva $y = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante está más cerca del origen.

23. Se requiere cerrar un potrero de forma rectangular, donde uno de los lados es el borde de un río, para que los animales beban agua. Se dispone de 10000 metros de alambre y el cerco debe ser de tres corridas de alambre. Determine las dimensiones del potrero de mayor área que se puede cercar con el alambre.

24. La reacción del cuerpo a las drogas con frecuencia está dada por una relación del tipo

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

donde D es la dosis y C (una constante) es la dosis máxima que puede administrarse. La razón de cambio de $R(D)$ con respecto a D se denomina *sensibilidad*. Encuentre el valor de D para el que la sensibilidad es máxima.

25. Pruebe que toda función continua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que posee derivada nula en todos los puntos $x \in]a,b[$ es constante.

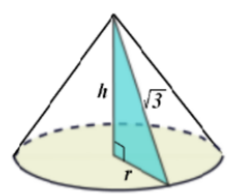
26. Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, derivables en (a,b) y tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a,b]$ $(\star)$.

27. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en (a,b). Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$ entonces pruebe que para todo x e y en $[a,b]$ se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ $(\star)$.

28. Evaluaciones de años anteriores.

   - (Prueba 2015) Demuestre que no existe una función derivable f que cumpla $f(1) = 2, f(2) = 4$ y $f'(x) > \pi \ \forall\ x$.

- (Prueba 2015) Considere la función $f\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \to [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$. Calcule lo siguiente:
  a) Puntos críticos, máximos y mínimos.
  b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
  c) Puntos de inflexión y concavidad de f.
  d) Grafique la función. (Hint: Exprese la función f de la forma $f(x) = A\operatorname{sen}(Bx + c)$)
- (Prueba 2015)
  a) Calcule la derivada de la función
  $$g(x) = \frac{\left(1 - \operatorname{sen}^2(\frac{x^2}{4})\right)^2 - \left(1 - \cos^2(\frac{x^2}{4})\right)^2}{\cos^2(\frac{x^2}{4}) - \operatorname{sen}^2(\frac{x^2}{4})}.$$
  b) Calcule y' derivando implicitamente la siguiente ecuación:
  $$\frac{x}{y^3} + 4y^2 - 7x = \frac{1}{2}.$$
- (Prueba 2015) Un triángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{3}[m]$ de largo se hace girar alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Determine el radio, la altura y el volumen del cono de mayor volumen que se pueda hacer de esta manera.



- (Prueba 2015) Se dispone de una lámina de cartón cuadrada de $12[cm]$ de lado. Cortando cuadrados iguales en las esquinas se construye una caja abierta doblando los laterales. Hallar las dimensiones de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo.
- (Prueba 2015) Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico cerrado, de base circular y de 125 centímetros cúbicos de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal(área) sea mñima.
- (Prueba 2014) Se desea construir una caja sin tapa de base cuadrada y que tenga capacidad de $625[\text{cm}^3]$. El costo de construcción de la base es de 25 pesos el $[\text{cm}^2]$ y el de los lados es de 20 pesos el $[\text{cm}^2]$. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que el costo total sea mínimo.