

$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

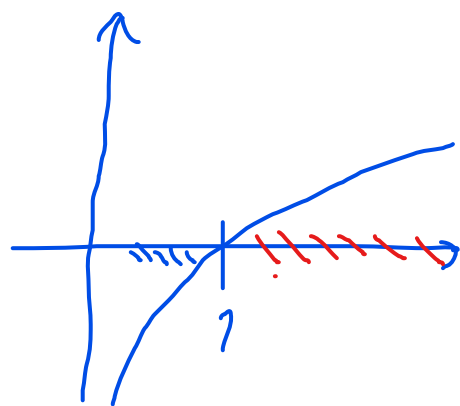
$$x \mapsto f(x) = \log_a(x), \quad a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

$$f(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$1) f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right)' = \frac{1}{\ln(a)} (\ln(x))' = \frac{1}{x \ln(a)} = 0$$

No tiene solución, luego f no tiene máximos ni mínimos locales. posibles máx y mín. loc.

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$



• Si $a \in]0, 1[$, entonces $\ln(a) < 0$ y luego $f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)} < 0, \forall x > 0$. Por lo tanto f es decreciente

• Si $a \in]1, \infty[$, entonces $\ln(a) > 0$ y luego $f'(x) > 0 \forall x > 0$. Por lo tanto, f es creciente.

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)} \Rightarrow f''(x) = \left((x \ln(a))^{-1} \right)'$$

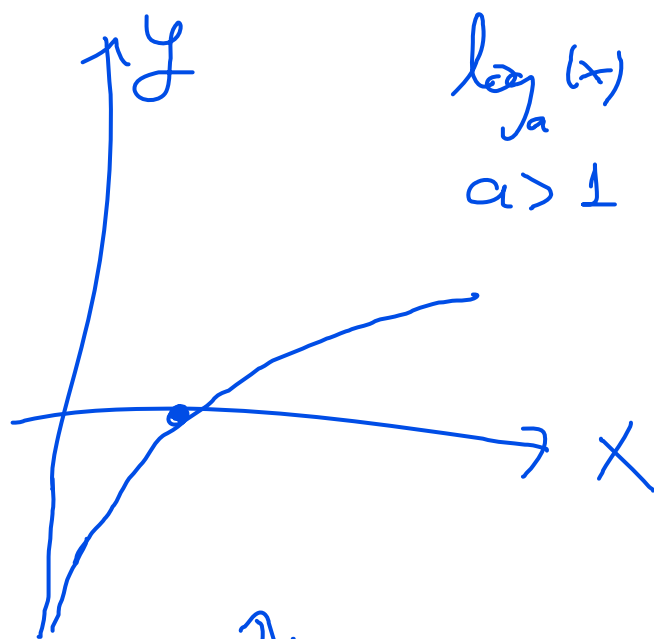
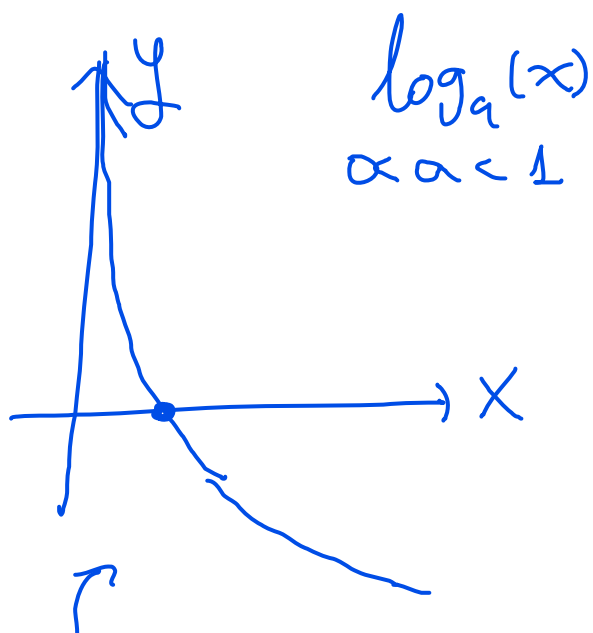
$$f''(x) = \frac{1}{\ln(a)} (x^{-1})'$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2 \ln(a)}$$

posibles
puntos de
Inflexión

No tiene pts de Inflexión.

- Si $a \in]0, 1[$, entonces $\ln(a) < 0$, luego $f''(x) > 0, \forall x > 0$. Por lo tanto, f es convexa
- Si $a \in]1, \infty[$, entonces $\ln(a) > 0$, luego $f''(x) < 0, \forall x > 0$. Por lo tanto, f es cóncava



$$\text{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$$

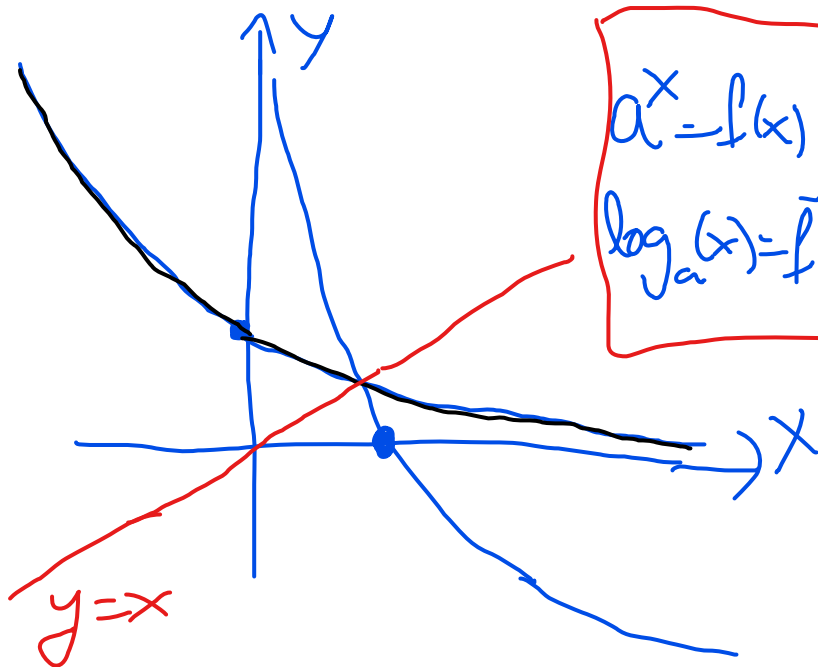
- Si $a \in]0, 1[$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \infty$

- Si $a \in]1, \infty[$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)$$

- Si $a \in]0, 1[$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = -\infty$

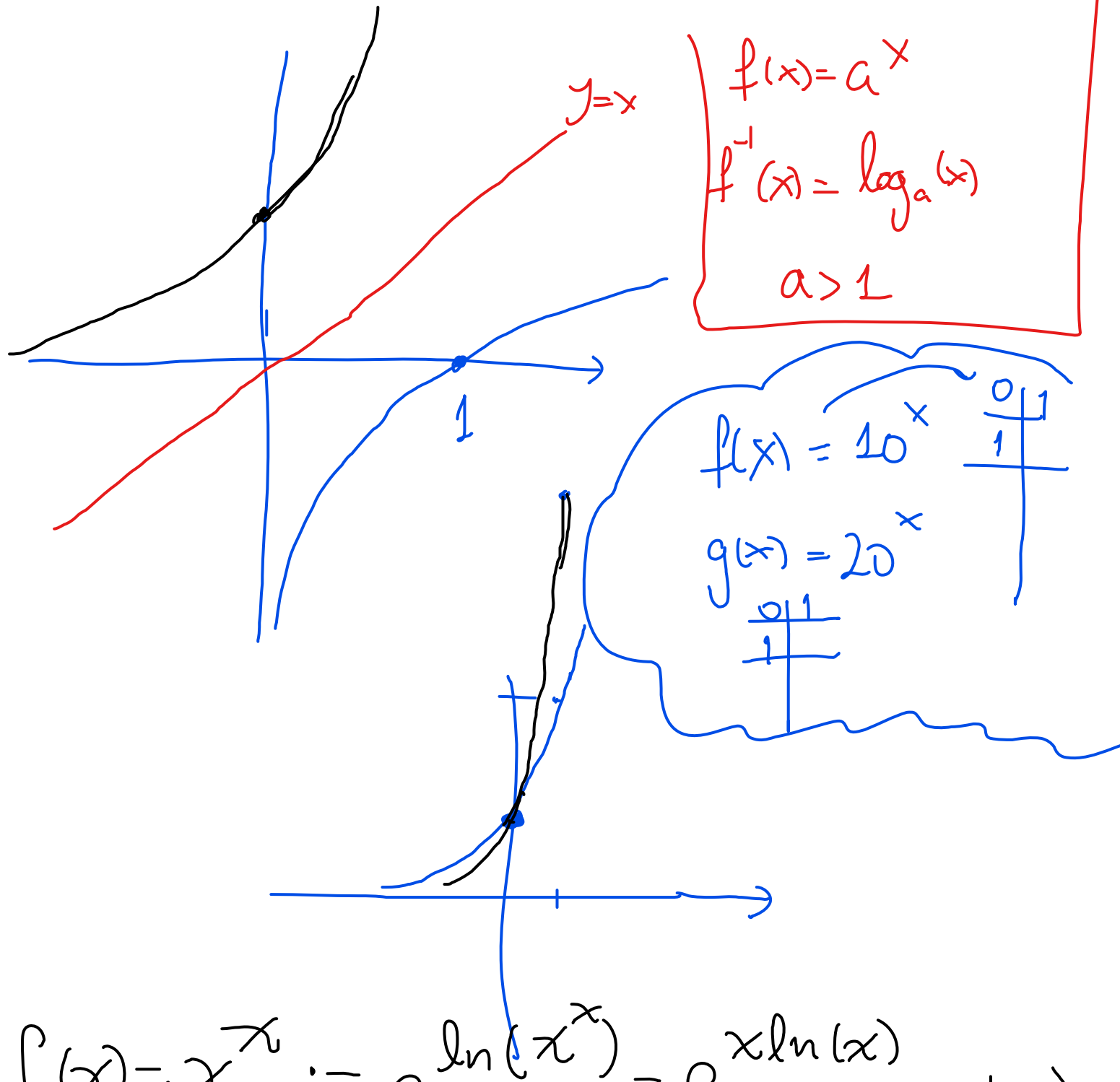
- Si $a \in]1, \infty[$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \infty$



$$a^x = f(x)$$

$$\log_a(x) = f^{-1}(x)$$

$$a \in]0, 1[$$



$$f(x)=x^x := e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln(x)} \quad (x>0)$$

$$*) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{Demostración.}$$

$$\text{Dem: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = L \quad / \quad \text{lm}$$

$$\ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = \ln(L)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = \ln(L)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(L)$$

Objetivo: Queremos saber el valor de L .

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \stackrel{\star}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\left(\frac{1}{n} \right)}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)} \cdot \left(-\frac{1}{n^2} \right)}{\left(-\frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$= 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \ln(L) / e$$

$$\therefore e^1 = e^{\ln(L)} = L, \boxed{L = e}$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e //$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1 //$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln(a)}{1} = \ln(a) //$$

$a \neq 1$ y $a > 0$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot 1}{1} = 1 //$$

$$f(x) = x \ln(x^2) \neq 2x \ln(x)$$

objetivo: Graficar f .

$$\text{Dom}(f) = ? \quad x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$1) \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Asíntotas verticales: Candidato $x=0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2) \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{\frac{-1}{x^2}}$$

¡cuidado con el dominio!

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0. \text{ No tiene Asíntotas verticales.}$$

$$\text{Asíntotas horizontales: } f(-x) = -x \ln(-x^2) \\ = -x \ln(x^2) \\ = -f(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(x^2) = \infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(x^2) = -\infty$$

No tiene Asíntotas horizontales.

$$\boxed{f \text{ es impar}}$$

$$2) f(x) = x \ln(x^2) \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln(x^2) + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \ln(x^2) + 2 = 0 \quad \downarrow \text{posibles máx y mín. locales}$$

$$\ln(x^2) + 2 = 0$$

$$\ln(x^2) = -2/e$$

$$e^{\ln(x^2)} = e^{-2}$$

$$x^2 = e^{-2} / \sqrt{}$$

$$x = \pm \sqrt{e^{-2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{e^2}} = \pm \frac{1}{e}$$

Posibles máx y mín. locales $(\frac{1}{e}, f(\frac{1}{e})), (-\frac{1}{e}, f(-\frac{1}{e}))$

	$-\infty$	$-1/e$	0	$1/e$	∞
$f'(x) = \ln(x^2) - 2$	+	-	-	+	
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\left(-\frac{1}{2e}\right)^2\right) &= \ln\left(\frac{1}{4e^2}\right) = \ln(1) - \ln(4e^2) \\
 &= 0 - (\ln(4) + \ln(e^2)) \\
 &= -\ln(4) - 2\ln(e) \\
 &= -\ln(4) - 2
 \end{aligned}$$

$$f'\left(-\frac{1}{2e}\right) = -\ln(4) < 0.$$

- f es estrictamente creciente en $]-\infty, -1/e]$ y en $[1/e, \infty[$.
- f es estrictamente decreciente en $[-1/e, 0[$ y en $]0, 1/e]$
- f tiene un máximo local en $(-1/e, f(-1/e))$

$$\begin{aligned}
 f(-1/e) &= (-1/e) \ln(-1/e)^2 = -\frac{1}{e} \ln((-e^{-1})^2) = -\frac{1}{e} \ln(e^{-2}) \\
 &= -\frac{1}{e} \ln(e^{-2}) = \frac{2}{e} //
 \end{aligned}$$
- f tiene un mínimo local en $(1/e, -\frac{2}{e})$ $\nearrow f$ es Impar