

P1) considere la función $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ por

(1)

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

a) Analice la monotonía de f .

Solución: Vemos que $f'(x) = \frac{[\ln(x)]' \cdot x - [x]' \cdot \ln(x)}{x^2}$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x}$$

En que $1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e^1 \geq e^{\ln(x)}$

$\Leftrightarrow e \geq x$

luego, • $f'(x) \geq 0$ si $x \in]0, e]$

• $f'(x) \leq 0$ si $x \in [e, \infty[$

por lo que f es creciente en $]0, e]$ y

decreciente en $[e, \infty[$.

Así que f alcanza un máximo local en $x=e$.

b) concluya que $\pi^e < e^\pi$

Solución: Note que como f decreciente en $[e, \infty[$, tenemos $f(x) < f(e)$ para todo $x > e$. En particular, para $x = \pi$.

Así se tiene $f(\pi) < f(e)$ (2)

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(\pi)}{\pi} < \frac{\ln(e)}{e} \Leftrightarrow e \ln(\pi) < \pi \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\pi^e) < \ln(e^\pi) \text{ y como tomando exponencial a ambas partes, } (e^x \text{ creciente})$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(\pi^e)} < e^{\ln(e^\pi)}$$

$$\Leftrightarrow \pi^e < e^\pi \quad \square$$

c) calcule la asíntota horizontal de f .

Solución: cabe mencionar que como f está definida

en $]0, \infty[$, no tiene sentido calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Así que solo calculamos el positivo.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ ya que cuando $x \rightarrow \infty$, tanto el numerador como el denominador van a ∞ , aplicamos L'Hôpital.

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln(x)]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

ya que este límite existe, concluimos que

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ y por lo tanto $y = 0$ es asíntota horizontal de f .

P2] $P(t)$: cantidad de bacterias a las t horas.

(3)

a) tenemos que $P(0) = 100$ y que la población se duplica cada tres horas. De modo que

$t=0$	$P = 100$	A sí, en general $P(t) = 2^{t/3} \cdot 100$
$t=3$	$P = 2 \cdot 100$	
$t=6$	$P = 2 \cdot (2 \cdot 100) = 2^2 \cdot 100$	
$t=9$	$P = 2^3 \cdot 100$	
$t=12$	$P = 2^4 \cdot 100$	

b) ¿cuántas horas deben transcurrir para que $P = 800$?

imponemos: $P(t) = 800 \Leftrightarrow 100 \cdot 2^{t/3} = 800$

$$\Leftrightarrow 2^{t/3} = \frac{800}{100} = 8 \Leftrightarrow 2^{t/3} = 8 = 2^3$$

$\Leftrightarrow \frac{t}{3} = 3 \Leftrightarrow \boxed{t = 9}$ Debem transcurrir 9 horas para que la población sea de 800.

c) Encuentre una función que modele la velocidad de crecimiento. ¿cuál es la velocidad a las 9 horas?

4

sol: vamos a calcular $P'(t)$. Para esto recordemos que si $f(x) = a^x$, esta también se puede escribir como $f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

Nota: técnicamente, esto es la definición de a^x

Así,

$$P(t) = 100 \cdot 2^{t/3} = 100 \cdot e^{t/3 \cdot \ln(2)} \quad \text{y por lo tanto,}$$
$$P'(t) = 100 \left[e^{t/3 \cdot \ln(2)} \right]' = 100 \cdot e^{t/3 \cdot \ln(2)} \cdot \left[\frac{t}{3} \ln(2) \right]'$$
$$= 100 e^{t/3 \cdot \ln(2)} \cdot \frac{\ln(2)}{3} = \frac{100 \cdot \ln(2)}{3} \cdot 2^{t/3}$$

o en $t=9$, la velocidad es,

$$P'(9) = \frac{100 \ln(2)}{3} \cdot 2^{9/3} = \frac{100 \ln(2)}{3} \cdot 2^3 = \frac{100 \ln(2)}{3} \cdot 8$$
$$= \frac{800 \ln(2)}{3} \approx 184,84$$

d) Encuentre la función inversa de P . (5)

Sol. como vimos, las funciones exponenciales son invertibles. Por lo que tiene sentido calcular esta inversa.

$$P(t) = 100 \cdot 2^{t/3} \Leftrightarrow \frac{P(t)}{100} = 2^{t/3} \Leftrightarrow \frac{P(t)}{100} = e^{\frac{t}{3} \cdot \ln(2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{3} \ln(2) = \ln\left(\frac{P(t)}{100}\right) \Leftrightarrow t = 3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{P(t)}{100}\right)}{\ln(2)}$$

técnicamente, podríamos dejar el cálculo de la inversa hasta aquí y obtener

$$t(P) = 3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{P}{100}\right)}{\ln(2)}$$

Pero recordando la fórmula para cambio de base de logaritmos, podemos definir

$$\log_a(b) := \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

y obtenemos entonces

$t(P) = 3 \cdot \log_2\left(\frac{P}{100}\right)$ para $P \in [100, \infty[$. Esto representa el tiempo (en horas) para que la población sea de P bacterias.

Nota: Esta es la fórmula para cambio de base de un logaritmo!

P3]

⑥

a) ¿cómo definiría $g(x) = x^x$?

Sol: Ya que sabemos $a^x = e^{x \ln(a)}$, tiene sentido establecer:

$$x^x = e^{x \cdot \ln(x)} \quad \text{para } x > 0.$$

b) Calcule el mínimo global de g .Sol:

Nota: Como e^x es creciente, el x en que

$x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$ alcanza un mínimo es el mismo que si solo minimizamos el exponente. Así que veamos $h(x) = x \cdot \ln(x)$.

$$\text{tenemos } h'(x) = [x]' \ln(x) + x [\ln(x)]' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln(x).$$

De modo que $h'(x) = 0$ cuando $1 + \ln(x) = 0$.

$$\Leftrightarrow \ln(x) = -1 \quad \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-1} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{e}}$$

y como $\ln(x)$ es creciente, vemos que en $x = \frac{1}{e}$, $h'(x) = 1 + \ln(x)$ pasa de $\ominus$ a $\oplus$ por lo que h pasa de decreciente a creciente. Luego, alcanza un mínimo local.

Al ser el único mínimo local, y ya que no hay asíntotas ni discontinuidades, (7)

h alcanza un mínimo global en $x = 1/e$.

Por lo tanto, al ser la exponencial una función creciente, tenemos que g alcanza mínimo global en $x = 1/e$. El mínimo es, por lo tanto, $g(1/e) = (1/e)^{1/e} = \sqrt[e]{1/e}$

$$= \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$$

c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

Sol: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)}$

Notar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

Por lo que, ya que e^x es continua en 0, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad \text{y ya que } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \text{ existe,}$$

tenemos que

(8)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$